MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

K. KNOPP
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
HEIDELBERG

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE L. FEJÉR A. E. INGHAM
H. KNESER W. MAGNUS O. PERRON
W. SÜSS H. WEYL

59. BAND 1. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 22. AUGUST 1953)

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1953

Math. Z.

Die **MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT**

wurde im Jahre 1918 von *L. Lichtenstein* unter der Mitwirkung von *K. Knopp, E. Schmidt* und *I. Schur* gegründet und herausgegeben. Nach dem Tode Lichtensteins übernahm *K. Knopp* 1933 die Herausgabe. Die Schriftleitung ergänzte sich 1933 durch *E. Kamke* und *F. K. Schmidt*, 1936 durch *R. Nevanlinna* und 1950 durch *H. Wielandt*, der 1952 die Herausgabe übernahm.

Die Zeitschrift erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht, und zwar bis zum 31. Dezember desjenigen Kalenderjahres, das auf das Jahr des Erscheinens folgt. Hieraus ergibt sich, daß grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden können, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind, und die auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen der Autor sich verpflichtet.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgend möglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sowie andere der Gefahr von Verwechselungen ausgesetzte Zeichen, z. B. die Landauschen Symbole o und O, sind stets besonders (etwa mit verschiedenfarbigen Stiften) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Frischlinstraße 27,
K. Knopp, Tübingen, Am Apfelberg 6,
R. Nevanlinna, Helsinki (Finnland), Mäntytie 5 B,
E. Schmidt, Berlin-Steglitz, Sedanstraße 8,
F. K. Schmidt, Heidelberg, Mathematisches Institut,
H. Wielandt, Tübingen, Biesingerstraße 7.

Springer-Verlag OHG — Berlin W 35, Reichpietschufer 20. — Heidelberg, Neuenheimer Landstraße 24. — Göttingen, Weender Straße 60.

Vertriebsvertretung des Verlages im Ausland:

Lange, Maxwell & Springer Ltd., 242 Marylebone Road, London N.W. 1.

---

59. Band — **Inhalt** — 1. Heft

Seite

Huppert, B., Über die Auflösbarkeit faktorisierbarer Gruppen 1
Knoche, H.-G., Über den Frobeniusschen Klassenbegriff in nilpotenten Gruppen II 8
Wenzl, F., Nullstellendichte reeller Polynome und Tschebyscheffsche Approximation 17
Carlitz, L., Weighted quadratic partitions (mod p^r) 40
Wang, H., The categoricity question of certain grand logics 47
Krull, W., Über Polynomzerlegung mit endlich vielen Schritten 57
Tillmann, H.-G., Randverteilungen analytischer Funktionen und Distributionen 61
Lorenzen, P., Über die Komplettierung in der Bewertungstheorie 84
Shah, S. M., and S. K. Singh, Borel's Theorem on a-points and exceptional values of Entire and Meromorphic Functions 88
Ellis, D., A Modification of the Parallelogram Law Characterization of Hilbert Spaces 94

HUPPERT, B.
Math. Zeitschr. Bd. 59, S. 1—7 (1953)

Über die Auflösbarkeit faktorisierbarer Gruppen.

Von

BERTRAM HUPPERT.

Die endliche Gruppe $\mathfrak{G}$ sei darstellbar als Produkt von zwei Untergruppen $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{K}$. Aus der Auflösbarkeit von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{K}$ folgt dann noch nicht die Auflösbarkeit von $\mathfrak{G}$ (s. [*10*]). Es ist eine interessante Frage, welchen Einschränkungen man $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{K}$ zu unterwerfen hat, damit $\mathfrak{G}$ auflösbar ist. Das beste bisher bekannte Resultat in dieser Richtung, das man N. ITÔ [*3*] verdankt, lautet so: Das Produkt einer nilpotenten Gruppe mit einer abelschen Gruppe oder mit einer p-Gruppe ist auflösbar. Für eine Teilaussage dieses Satzes, nämlich die Auflösbarkeit eines Produktes von zwei abelschen Gruppen, gaben wir kürzlich einen einfachen Beweis [*2*]. Die dort durchgeführten Überlegungen lassen sich verfeinern und liefern folgende Resultate:

Satz 1. *Das Produkt einer Diedergruppe mit einer abelschen Gruppe ist auflösbar.*

Satz 2. *Das Produkt einer Diedergruppe mit einer p-Gruppe ist auflösbar.*

Satz 3. *Das Produkt von zwei Diedergruppen ist auflösbar.*

Das Ziel dieser Note ist der Beweis dieser Sätze. Sie scheinen uns von Interesse zu sein, da sie zeigen, daß man auch bei speziellen Klassen von nichtnilpotenten Gruppen zu Auflösbarkeitsaussagen gelangen kann. Man muß aber mit weiteren Verallgemeinerungen vorsichtig sein, wie die Zerlegung der einfachen Gruppe der Ordnung 168 in das Produkt einer Diedergruppe der Ordnung 8 mit einer nichtabelschen Gruppe der Ordnung 21 lehrt. (Den Hinweis auf dieses Beispiel verdanken wir Herrn N. ITÔ.)

Mit $(\mathfrak{G})$ bezeichnen wir die Ordnung der Gruppe $\mathfrak{G}$. $\mathfrak{U} < \mathfrak{G}$ bedeute, daß $\mathfrak{U}$ Untergruppe von $\mathfrak{G}$ ist. Ist $\mathfrak{U}$ Normalteiler von $\mathfrak{G}$, so schreiben wir $\mathfrak{U} \lhd \mathfrak{G}$. Mit $\mathfrak{D}_{2k}$ bezeichnen wir in dieser Arbeit stets die Diedergruppe der Ordnung $2k$, mit $\mathfrak{Z}_j$ den für $j \mid k$ und $k \neq 2$ eindeutig bestimmten zyklischen Normalteiler der Ordnung j von $\mathfrak{D}_{2k}$. $\mathfrak{A}_t$ sei die alternierende Gruppe vom Grad t. Ist p^α die höchste Potenz der Primzahl p, welche m noch teilt, so schreiben wir $p^\alpha \top m$. $\mathfrak{E}$ sei die Einheitsgruppe.

Hilfssatz 1. *Sei $\mathfrak{G} = \mathfrak{H} \cdot \mathfrak{K}$ mit $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{K} = \mathfrak{E}$. Ist die Untergruppe $\mathfrak{K}$ ihr eigener Normalisator in $\mathfrak{G}$ und hat sie mit jeder ihrer Konjugierten $\mathfrak{K}^S$ den Durchschnitt $\mathfrak{E}$, so ist $\mathfrak{H}$ invariant in $\mathfrak{G}$.*

Dieser Hilfssatz folgt sofort aus einem bekannten Satz von FROBENIUS (s. [*6*] S. 202, Satz 180). Jedoch läßt er sich auch elementar beweisen: Wir stellen $\mathfrak{G}$ dar als transitive Permutationsgruppe der Nebenklassen nach $\mathfrak{K}$. Dabei wird $\mathfrak{H}$ auf eine reguläre Permutationsgruppe abgebildet. Die Elemente

in $\mathfrak{H}$ und in den zu $\mathfrak{K}$ konjugierten Gruppen erschöpfen schon ganz $\mathfrak{G}$, denn dies sind

$$(\mathfrak{H}) + (\mathfrak{H})\,[(\mathfrak{K}) - 1)] = (\mathfrak{H})\,(\mathfrak{K}) = (\mathfrak{G})$$

Elemente. Somit besteht $\mathfrak{H}$, abgesehen von dem Einheitselement E, aus genau den Permutationen von $\mathfrak{G}$, welche kein Symbol fest lassen. $\mathfrak{H}$ ist daher invariant in $\mathfrak{G}$.

Hilfssatz 2. *Ist* $\mathfrak{U} \neq \mathfrak{E}$ *eine Untergruppe der Diedergruppe* $\mathfrak{D}_{2k}$, *und enthält* $\mathfrak{U}$ *keinen Normalteiler von* $\mathfrak{D}_{2k}$, *so gilt* $(\mathfrak{U}) = 2$ *und* $\mathfrak{D}_{2k} = \mathfrak{Z}_k \cdot \mathfrak{U}$.

Beweis. $\mathfrak{Z}_k \cap \mathfrak{U}$ ist ein Normalteiler von $\mathfrak{D}_{2k}$. Enthält also $\mathfrak{U}$ keinen Normalteiler von $\mathfrak{D}_{2k}$, so ist $\mathfrak{Z}_k \cap \mathfrak{U} = \mathfrak{E}$, $\mathfrak{Z}_k \cdot \mathfrak{U} = \mathfrak{D}_{2k}$, also $(\mathfrak{U}) = 2$.

Beweis von Satz 1. Sei also $\mathfrak{G} = \mathfrak{D}_{2k} \cdot \mathfrak{H}$, $\mathfrak{D}_{2k}$ die Diedergruppe der Ordnung $2k$ und $\mathfrak{H}$ eine abelsche Gruppe, $\mathfrak{G} \neq \mathfrak{D}_{2k}$, $\mathfrak{G} \neq \mathfrak{H}$.

Der Beweis wird durch Induktion nach der Gruppenordnung geführt und zerfällt in mehrere Teile. Offenbar genügt der Nachweis eines auflösbaren Normalteilers, der von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{G}$ verschieden ist.

a) Sei zunächst $\mathfrak{D}_{2k} \cap \mathfrak{H} = \mathfrak{D} \neq \mathfrak{E}$. Dann ist $\mathfrak{D} \lhd \mathfrak{H}$. Nach [4], S. 436–437 oder [7], Satz 2 gibt es dann einen Normalteiler $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{G}$, der $\mathfrak{D}$ enthält und in $\mathfrak{D}_{2k}$ liegt, also auflösbar ist.

Weiterhin dürfen wir $\mathfrak{D}_{2k} \cap \mathfrak{H} = \mathfrak{E}$ annehmen.

b) Sei $\mathfrak{H}$ eine maximale Untergruppe von $\mathfrak{G}$. Ist $\mathfrak{N}(\mathfrak{H})$ der Normalisator von $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{G}$, so ist $\mathfrak{N}(\mathfrak{H}) = \mathfrak{H}$ oder $\mathfrak{N}(\mathfrak{H}) = \mathfrak{G}$. Im zweiten Falle sind wir fertig. Sei also $\mathfrak{N}(\mathfrak{H}) = \mathfrak{H}$. Hat $\mathfrak{H}$ mit jeder Konjugierten von $\mathfrak{H}$ den Durchschnitt $\mathfrak{E}$, so ist $\mathfrak{D}_{2k}$ nach Hilfssatz 1 ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Andernfalls gibt es ein $S \in \mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{H}^S \neq \mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{H}^S = \mathfrak{F} \neq \mathfrak{E}$. Dann ist $\mathfrak{F}$ invariant in $\mathfrak{H}$ und in $\mathfrak{H}^S$, also auch in der von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}^S$ erzeugten Gruppe $\{\mathfrak{H}, \mathfrak{H}^S\} = \mathfrak{G}$.

c) Sei $\mathfrak{H}$ nicht maximal in $\mathfrak{G}$; dann gibt es zwischen $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{G}$ eine echte Zwischengruppe $\mathfrak{U} = \mathfrak{H} \cdot \mathfrak{L} \neq \mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{L} = \mathfrak{D}_{2k} \cap \mathfrak{U}$. Nun gilt $\mathfrak{G} = \mathfrak{D}_{2k}\,\mathfrak{U}$. Enthält $\mathfrak{L}$ einen Normalteiler $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{D}_{2k}$, so enthält $\mathfrak{U}$ einen Normalteiler $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{G}$ (s. wieder [4] oder [7]). $\mathfrak{U}$ ist Produkt der abelschen Gruppe $\mathfrak{H}$ mit der Gruppe $\mathfrak{L}$, welche zyklisch oder eine Diedergruppe ist. Nach ITÔ [3] oder gemäß der Induktionsannahme ist $\mathfrak{U}$ auflösbar, $\mathfrak{M}$ als Untergruppe von $\mathfrak{U}$ daher ebenfalls.

Enthält jedoch $\mathfrak{L}$ keinen Normalteiler von $\mathfrak{D}_{2k}$, so liefert Hilfssatz 2 die Aussagen $\mathfrak{D}_{2k} = \mathfrak{Z}_k \cdot \mathfrak{L}$ und $(\mathfrak{L}) = 2$. Dann gilt $\mathfrak{G} = [\mathfrak{Z}_k\,\mathfrak{L}]\,\mathfrak{H} = \mathfrak{Z}_k[\mathfrak{L}\,\mathfrak{H}]$; der Faktor $\mathfrak{L}$ darf also von $\mathfrak{Z}_k$ zu $\mathfrak{H}$ geschoben werden, was später von Nutzen sein wird.

d) Sei $\mathfrak{D}_{2k}$ nicht maximal in $\mathfrak{G}$. Dann gibt es eine echte Untergruppe $\mathfrak{V} \neq \mathfrak{D}_{2k}$ von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{D}_{2k} < \mathfrak{V} = \mathfrak{D}_{2k}\,\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{N} = \mathfrak{V} \cap \mathfrak{H} \lhd \mathfrak{H}$. Es folgt nun $\mathfrak{G} = \mathfrak{V} \cdot \mathfrak{H}$. Nach [4] oder [7] existiert dann ein Normalteiler $\mathfrak{N} \neq \mathfrak{E}$ von $\mathfrak{G}$, der in $\mathfrak{V}$ liegt. $\mathfrak{V}$ ist nach Induktionsannahme auflösbar, daher auch $\mathfrak{N}$.

Weiterhin darf also angenommen werden, daß $\mathfrak{D}_{2k}$ eine maximale Untergruppe von $\mathfrak{G}$ ist. Der Normalisator $\mathfrak{N}(\mathfrak{Z}_k)$ von $\mathfrak{Z}_k$ umfaßt $\mathfrak{D}_{2k}$. Sehen wir von dem trivialen Fall $\mathfrak{N}(\mathfrak{Z}_k) = \mathfrak{G}$ ab, so können wir $\mathfrak{N}(\mathfrak{Z}_k) = \mathfrak{D}_{2k}$ annehmen.

e) Ist k ungerade, so stellen wir $\mathfrak{G}$ dar als transitive Permutationsgruppe n $2k$ Symbolen, den Nebenklassen nach $\mathfrak{H}$. Dabei wird $\mathfrak{D}_{2k}$ regulär darge-stellt. Abgesehen von der Bezeichnung der Symbole hat die reguläre Dar-stellung von $\mathfrak{D}_{2k}$ die Gestalt

$$Z = (1, 2, \ldots, k-1, k)\,(k+1, k+2, \ldots, 2k-1, 2k)$$

$$L = (1, k+1)\,(2, 2k)\,(3, 2k-1) \ldots (i, 2k-i+2) \ldots (k, k+2),$$

vobei Z und L erzeugende Elemente von $\mathfrak{D}_{2k}$ mit den Relationen

$$Z^k = L^2 = E, \quad L Z L^{-1} = Z^{-1}$$

ind. L ist wegen $2 \nmid k$ eine ungerade Permutation. Daher ist der Durch-schnitt von $\mathfrak{G}$ mit der alternierenden Gruppe $\mathfrak{A}_{2k}$ ein eigentlicher Normal-teiler $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{G}$ vom Index 2. Z liegt in $\mathfrak{G} \cap \mathfrak{A}_{2k} = \mathfrak{N}$. Aus $\mathfrak{G} = \mathfrak{Z}_k \{\mathfrak{L}\mathfrak{H}\}$ folgt nun wegen $\mathfrak{Z}_k < \mathfrak{N}$ die Gleichung $\mathfrak{N} = \mathfrak{Z}_k \cdot \mathfrak{R}$ mit geeignetem $\mathfrak{R} < \mathfrak{L}\mathfrak{H}$. $\mathfrak{Z}_k$ ist eigener Normalisator in $\mathfrak{N}$; denn der Normalisator von $\mathfrak{Z}_k$ in $\mathfrak{G}$ ist $\mathfrak{D}_{2k}$ und $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{D}_{2k} = \mathfrak{Z}_k$.

Hat $\mathfrak{Z}_k$ mit jeder Konjugierten den Durchschnitt $\mathfrak{E}$, so ist nach Hilfs-satz 2 $\mathfrak{R} \lhd \mathfrak{N}$. $\mathfrak{R}$ ist Untergruppe von $\mathfrak{L}\mathfrak{H}$; wegen $(\mathfrak{L}) = 2$ ist $\mathfrak{H}$ invariant in $\mathfrak{L}\mathfrak{H}$, $\mathfrak{L}\mathfrak{H}$ also auflösbar und $\mathfrak{R}$ daher ebenfalls. Dann ist aber auch $\mathfrak{N}$ auf-lösbar, womit ein auflösbarer Normalteiler von $\mathfrak{G}$ nachgewiesen ist.

Ist jedoch für ein geeignetes $S \in \mathfrak{G}$ $\mathfrak{Z}_k \neq \mathfrak{Z}_k^S$ und $\mathfrak{Z}_k \cap \mathfrak{Z}_k^S = \mathfrak{D} \neq \mathfrak{E}$, so ist $\mathfrak{D}$ eine charakteristische Untergruppe von $\mathfrak{Z}_k$ und $\mathfrak{Z}_k^S$, daher invariant in $\mathfrak{D}_{2k}$ und in $\mathfrak{D}_{2k}^S$, also auch invariant in $\{\mathfrak{D}_{2k}, \mathfrak{D}_{2k}^S\} = \mathfrak{G}$. ($\mathfrak{D}_{2k}^S \neq \mathfrak{D}_{2k}$ folgt aus $\mathfrak{Z}_k^S \neq \mathfrak{Z}_k$ wegen $k \neq 2$.)

Weiter sei k gerade.

f) Nun sei $(\mathfrak{H})$ ungerade. Wir stellen $\mathfrak{G}$ dar als transitive Permutations-gruppe in k Symbolen, den Nebenklassen nach $\mathfrak{L}\mathfrak{H}$. Z wird dabei als k-Zyklus dargestellt, ist also eine ungerade Permutation. $\mathfrak{N} = \mathfrak{G} \cap \mathfrak{A}_k$ ist daher ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$ vom Index 2. Wegen $2 \nmid (\mathfrak{H})$ folgt $\mathfrak{H} < \mathfrak{N}$, $\mathfrak{N} = \mathfrak{H} \cdot \mathfrak{J}$ mit $\mathfrak{J} < \mathfrak{D}_{2k}$. $\mathfrak{N}$ ist nach unserer Induktionsannahme auflösbar.

g) Zu behandeln bleibt noch der Fall, daß k und $(\mathfrak{H})$ gerade sind. Sei also $2^\alpha \mid k$, $\alpha > 0$. Nach WIELANDT [*10*] hat eine geeignete 2-Sylowgruppe von $\mathfrak{G}$ die Gestalt $\mathfrak{P}_2(\mathfrak{G}) = \mathfrak{D}_{2 \cdot 2^\alpha} \mathfrak{P}_2(\mathfrak{H})$, wobei $\mathfrak{P}_2(\mathfrak{H})$ die 2-Sylowgruppe von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{D}_{2 \cdot 2^\alpha}$ eine geeignete 2-Sylowgruppe von $\mathfrak{D}_{2k}$ ist. (Offenbar ist $\mathfrak{D}_{2 \cdot 2^\alpha}$ wieder eine Diedergruppe.) Sei C ein von E verschiedenes Element aus dem Zentrum $\mathfrak{Z}(\mathfrak{P}_2(\mathfrak{G}))$ von $\mathfrak{P}_2(\mathfrak{G})$. Nun sind drei Fälle möglich:

Fall 1. Wenn C in $\mathfrak{H}$ liegt, so umfaßt der Normalisator $\mathfrak{N}(C)$ von C die Gruppen $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{D}_{2 \cdot 2^\alpha}$. Der Index von $\mathfrak{H}$ unter $\mathfrak{N}(C)$ ist daher mindestens 4. Nach c) ist dann $\mathfrak{N}(C) = \mathfrak{G}$, also $\{C\}$ ein zyklischer Normalteiler von $\mathfrak{G}$.

Fall 2. Sei $C = D\,H$ mit $D \in \mathfrak{D}_{2k}$ und $H \in \mathfrak{H}$, $D \neq E$ und $H \neq E$. Für alle $H' \in \mathfrak{P}_2(\mathfrak{H})$ ist dann

$$D\,H = C = C^{H'} = D^{H'}\,H^{H'} = D^{H'}\,H,$$

somit $D^{H'} = D$. Also liegt D im Zentralisator $\mathfrak{C}(\mathfrak{P}_2(\mathfrak{H}))$ von $\mathfrak{P}_2(\mathfrak{H})$. Daher folgt $\mathfrak{C}(\mathfrak{P}_2(\mathfrak{H})) > \{\mathfrak{H}, D\} \neq \mathfrak{H}$. Ist nun $\mathfrak{C}(\mathfrak{P}_2(\mathfrak{H})) = \mathfrak{G}$, so sind wir fertig. Andernfalls ist nach c) notwendig $\mathfrak{C}(\mathfrak{P}_2(\mathfrak{H})) = \mathfrak{L} \cdot \mathfrak{H}$, wobei $\mathfrak{L}$ aus genau zwei Elementen E, L besteht; somit ist $D \in \mathfrak{L} \cdot \mathfrak{H}$, $D \in \mathfrak{L}$, $D = L$, $C = LH$. Für $D' \in \mathfrak{Z}_{2^\alpha} < \mathfrak{Z}_k$ ergibt sich nun

$$LH = C = C^{D'} = L^{D'} H^{D'}$$

und weiter ist

$$L^{D'} = D' L D'^{-1} = D' L D'^{-1} L^{-1} L = D'^2 L$$

wegen der in $\mathfrak{D}_{2k}$ gültigen Relation $LD'L^{-1} = D'^{-1}$. Schließlich wird daher $LH = D'^2 L H^{D'} = L D'^{-2} H^{D'}$, also $H = D'^{-2} H^{D'} = D'^{-1} H D'^{-1}$. Hieraus folgt $HD'H^{-1} = D'^{-1}$. Der Normalisator $\mathfrak{N}(\mathfrak{Z}_{2^\alpha})$ von $\mathfrak{Z}_{2^\alpha}$ umfaßt daher $\{\mathfrak{D}_{2k}, H\}$, ist also wegen $H \neq E$ eine echte Obergruppe von $\mathfrak{D}_{2k}$. Nach d) ist dann $\mathfrak{N}(\mathfrak{Z}_{2^\alpha}) = \mathfrak{G}$, womit auch in diesem Falle ein auflösbarer Normalteiler aufgezeigt ist.

Fall 3. Nun sei $C = D \in \mathfrak{D}_{2k}$. Falls $C \in \mathfrak{Z}_k$, so umfaßt der Normalisator der Gruppe $\{C\}$ sowohl $\mathfrak{D}_{2k}$ als auch $\mathfrak{P}_2(\mathfrak{H})$; dann ist $\{C\}$ invariant in $\mathfrak{G}$. Im anderen Falle haben wir $\mathfrak{D}_{2k} = \mathfrak{Z}_k \cdot \{C\}$. Dann ist $\mathfrak{D}_{2 \cdot 2^\alpha} = \mathfrak{Z}_{2^\alpha} \cdot \{C\}$ abelsch wegen $C \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{P}_2(\mathfrak{G}))$. Daraus folgt $4 \top 2k$, $2 \top k$. Die betrachtete 2-Sylowgruppe von $\mathfrak{G}$ hat also die Gestalt $\mathfrak{P}_2(\mathfrak{G}) = \mathfrak{D}_{2 \cdot 2} \cdot \mathfrak{P}_2(\mathfrak{H})$. Wir dürfen annehmen, daß $\mathfrak{P}_2(\mathfrak{H})$ kein Zentrumselement von $\mathfrak{P}_2(\mathfrak{G})$ enthält; sonst würde nämlich Fall 1 eintreten. Dann enthält $\mathfrak{P}_2(\mathfrak{H})$ auch keinen Normalteiler von $\mathfrak{P}_2(\mathfrak{G})$. Stellen wir $\mathfrak{P}_2(\mathfrak{G})$ dar als transitive Permutationsgruppe der Nebenklassen nach $\mathfrak{P}_2(\mathfrak{H})$, so entsteht daher eine treue Darstellung von $\mathfrak{P}_2(\mathfrak{G})$ vom Grad 4. Daraus folgt $(\mathfrak{P}_2(\mathfrak{G})) \mid 8$, $2 \top (\mathfrak{H})$. Die 2-Sylowgruppe von $\mathfrak{G}$ ist demnach isomorph zu einer 2-Sylowgruppe der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_4$, also zu einer Diedergruppe der Ordnung 8. Nur dieser Fall ist jetzt noch zu behandeln.

Der Normalisator $\mathfrak{N}(\mathfrak{P}_2(\mathfrak{H}))$ von $\mathfrak{P}_2(\mathfrak{H})$ umfaßt $\mathfrak{H}$ und C, ist also von $\mathfrak{H}$ verschieden. Ist $\mathfrak{N}(\mathfrak{P}_2(\mathfrak{H})) \neq \mathfrak{G}$, so gilt nach c) $\mathfrak{N}(\mathfrak{P}_2(\mathfrak{H})) = \mathfrak{H}\{C\}$. Nun stellen wir $\mathfrak{G}$ dar als transitive Permutationsgruppe der Nebenklassen nach $\mathfrak{H} \cdot \{C\}$. Diese Darstellung hat den Grad k. Wie wir unter c) sahen, läßt $\mathfrak{G}$ die Zerlegung $\mathfrak{G} = \mathfrak{Z}_k \cdot [\mathfrak{H} \cdot \{C\}]$ zu. Daher wird $\mathfrak{Z}_k$ bei der betrachteten Darstellung regulär wiedergegeben. Wegen $2 \mid k$ ist die Z zugeordnete Permutation ungerade. Somit besitzt $\mathfrak{G}$ einen Normalteiler vom Index 2, nämlich den Durchschnitt von $\mathfrak{G}$ mit der alternierenden Gruppe $\mathfrak{A}_k$. Wir können annehmen, daß die Darstellung treu ist; im anderen Falle würde $\mathfrak{H}\{C\}$ einen eigentlichen Normalteiler von $\mathfrak{G}$ enthalten. Dieser wäre auflösbar, denn $\mathfrak{H}\{C\}$ ist auflösbar, da $\mathfrak{H}$ als Untergruppe vom Index 2 in $\mathfrak{H}\{C\}$ invariant ist.

Der Normalteiler $\mathfrak{N} = \mathfrak{G} \cap \mathfrak{A}_k$ umfaßt die in $\mathfrak{Z}_k$ liegende zyklische Untergruppe $\mathfrak{Z}_l$ der Ordnung $l = k/2$ und das 2-Sylowkomplement $\mathfrak{Q}_2(\mathfrak{H})$ von $\mathfrak{H}$. Der Durchschnitt von $\mathfrak{N}$ mit $\mathfrak{P}_2(\mathfrak{G})$ ist eine Untergruppe von $\mathfrak{P}_2(\mathfrak{G})$ vom Index 2. Ist $\mathfrak{P}_2(\mathfrak{H}) < \mathfrak{N}$, so haben wir $\mathfrak{H} < \mathfrak{N}$, und $\mathfrak{N} = \mathfrak{H} \cdot \{\mathfrak{N} \cap \mathfrak{D}_{2k}\}$ ist nach Induktionsannahme auflösbar. Sei daher $\mathfrak{P}_2(\mathfrak{H}) \not< \mathfrak{N}$. Wegen $2 \top (\mathfrak{H})$ können wir setzen $\mathfrak{P}_2(\mathfrak{H}) = \{K\}$ mit $K^2 = E$, $K \notin \mathfrak{N}$.

$\mathfrak{P}_2(\mathfrak{G}) = \{Z^l, C, K\}$ ist isomorph zu $\mathfrak{D}_{2\cdot 4}$. Die Elemente Z^l, C und K haben alle die Ordnung 2. C liegt im Zentrum von $\mathfrak{P}_2(\mathfrak{G})$. Z^l und K sind nicht vertauschbar, da sonst $\mathfrak{P}_2(\mathfrak{G})$ abelsch wäre. Z^l liegt nicht in $\mathfrak{N}$; denn sonst hätten wir $Z^l \in \mathfrak{N}$ und $Z^2 \in \mathfrak{N}$, also auch $Z \in \mathfrak{N}$, was nicht stimmt. Wegen $K \notin \mathfrak{N}$ liegt $Z^l K$ sicher in $\mathfrak{N}$. Wie leicht zu kontrollieren ist, hat das Produkt von zwei nicht vertauschbaren Elementen der Ordnung 2 in der Gruppe $\mathfrak{D}_{2\cdot 4}$ stets die Ordnung 4. Die 2-Sylowgruppe von $\mathfrak{N}$ ist also die von $Z^l K$ erzeugte zyklische Gruppe der Ordnung 4. Nach einem bekannten Satz von Burnside (s. [6] S. 141) besitzt daher $\mathfrak{N}$ einen Normalteiler $\mathfrak{M}$ vom Index 4. Dieser läßt sich zerlegen in $\mathfrak{M} = \mathfrak{Z}_l \cdot \mathfrak{Q}_2(\mathfrak{H})$, ist also nach Itô [3] auflösbar. Somit ist $\mathfrak{N}$ auflösbar und dann $\mathfrak{G}$ ebenfalls.

Damit ist Satz 1 vollständig bewiesen.

Beweis von Satz 2. Sei nun $\mathfrak{G}$ das Produkt der Diedergruppe $\mathfrak{D}_{2k}$ mit der p-Gruppe $\mathfrak{P}$. Wieder schließen wir mittels Induktion nach der Gruppenordnung.

a) Sei zunächst $(\mathfrak{P}) = p^n$ mit $p \neq 2$ und $p \mid k$. Wir können uns auf den Fall $\mathfrak{Z}_k \cap \mathfrak{P} = \mathfrak{E}$ beschränken. Dann ist der Index von $\mathfrak{P}$ im Normalisator $\mathfrak{N}(\mathfrak{P})$ sicher durch p teilbar. Ist $\mathfrak{P}$ nicht maximal in $\mathfrak{G}$, so können wir wie bei Satz 1, c) annehmen, daß eine maximale Obergruppe $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{P}$ die Ordnung $2(\mathfrak{P})$ hat. Daher folgt $\mathfrak{N}(\mathfrak{P}) = \mathfrak{G}$, $\mathfrak{P} \lhd \mathfrak{G}$.

b) Sei $p \neq 2$, $p \nmid k$ und $2 \nmid k$. Eine Darstellung von $\mathfrak{G}$ als Permutationsgruppe der Nebenklassen nach $\mathfrak{P}$ gibt $\mathfrak{D}_{2k}$ regulär wieder. Da die reguläre Darstellung von $\mathfrak{D}_{2k}$ nicht in $\mathfrak{A}_{2k}$ liegt [s. Satz 1, e)], ist $\mathfrak{N} = \mathfrak{G} \cap \mathfrak{A}_{2k}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$ vom Index 2. Wegen $p \neq 2$ liegt $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{N}$. Daher ist $\mathfrak{N} = \mathfrak{P}\{\mathfrak{N} \cap \mathfrak{D}_{2k}\}$; gemäß der Induktionsannahme oder nach Itô [3] ist $\mathfrak{N}$ auflösbar.

c) Sei nun $p \neq 2$, $p \nmid k$, aber $2 \mid k$. Das Zentrum von $\mathfrak{D}_{2k}$ enthält dann nicht nur das Einheitselement. Die Anzahl der Konjugierten eines von E verschiedenen Elementes aus $\mathfrak{Z}(\mathfrak{D}_{2k})$ ist daher eine Potenz von p. Nach einem bekannten Satz von Burnside (s. [6], S. 193) ist dann $\mathfrak{G}$ nicht einfach, sondern besitzt einen eigentlichen Normalteiler $\mathfrak{N}$. Ist $\mathfrak{N}\mathfrak{P} \neq \mathfrak{G}$, so haben wir $\mathfrak{N}\mathfrak{P} = \mathfrak{P}\{\mathfrak{N} \cap \mathfrak{D}_{2k}\}$, und diese Gruppe ist nach Induktionsannahme oder nach Itô [3] auflösbar, daher auch $\mathfrak{N}$. Ist aber $\mathfrak{N} \cdot \mathfrak{P} = \mathfrak{G}$, so gilt $(\mathfrak{G}/\mathfrak{N}) = p^\beta$. Wegen $p \neq 2$ und $p \nmid k$ liegt dann $\mathfrak{D}_{2k}$ in $\mathfrak{N}$. Somit erlaubt $\mathfrak{N}$ die Zerlegung $\mathfrak{N} = \mathfrak{D}_{2k} \cdot \{\mathfrak{P} \cap \mathfrak{N}\}$ und ist nach Induktionsannahme auflösbar.

d) Sei schließlich $p = 2$ und $k = 2^\alpha l$. Dann ist $\mathfrak{G} = \mathfrak{Z}_l \cdot \mathfrak{P}_2(\mathfrak{G})$ das Produkt einer abelschen (sogar zyklischen) Gruppe mit einer p-Gruppe, ist daher nach Itô [3] auflösbar.

(Die Schlußweise unter c) ist dem Beweis von Itô in [3] entnommen.)

Beweis von Satz 3. Sei $\mathfrak{G} = \mathfrak{D}_{2k}\mathfrak{D}_{2j}$ das Produkt der beiden Diedergruppen $\mathfrak{D}_{2k}$ und $\mathfrak{D}_{2j}$. Der Nachweis der Auflösbarkeit wird abermals durch Induktion nach der Gruppenordnung erbracht.

a) Sei $\mathfrak{D}_{2k} \cap \mathfrak{D}_{2j} = \mathfrak{D} \neq \mathfrak{E}$. Ist $\mathfrak{D}^* = \mathfrak{D} \cap \mathfrak{Z}_j \neq \mathfrak{E}$, so gilt $\mathfrak{D}^* \lhd \mathfrak{D}_{2j}$. Nach [4] oder [7] existiert dann ein Normalteiler $\mathfrak{N} \neq \mathfrak{E}$ von $\mathfrak{G}$, der in $\mathfrak{D}_{2k}$ liegt, also

auflösbar ist. Ist aber $\mathfrak{D} \cap \mathfrak{Z}_j = \mathfrak{E}$, so hat $\mathfrak{D}$ nach Hilfssatz 2 die Ordnung 2, und es ist $\mathfrak{D}_{2j} = \mathfrak{D} \cdot \mathfrak{Z}_j$. Damit folgt nun $\mathfrak{G} = \mathfrak{D}_{2k}\{\mathfrak{D}\mathfrak{Z}_j\} = \{\mathfrak{D}_{2k}\mathfrak{D}\}\mathfrak{Z}_j = \mathfrak{D}_{2k}\mathfrak{Z}_j$, und $\mathfrak{G}$ ist auflösbar nach Satz 1 dieser Arbeit.

b) Seien $\mathfrak{D}_{2k}$ und $\mathfrak{D}_{2j}$ maximale Untergruppen von $\mathfrak{G}$. Stellen wir $\mathfrak{G}$ dar als transitive Permutationsgruppe der Nebenklassen nach $\mathfrak{D}_{2k}$, so wird $\mathfrak{D}_{2j}$ dabei regulär dargestellt. Wir dürfen wieder annehmen, daß diese Darstellung treu ist, da sonst $\mathfrak{D}_{2k}$ einen eigentlichen Normalteiler von $\mathfrak{G}$ enthalten würde. Die Darstellung von $\mathfrak{G}$ ist primitiv, da $\mathfrak{D}_{2k}$ maximale Untergruppe von $\mathfrak{G}$ ist. Nach einem Satz von WIELANDT [9] ist eine primitive Permutationsgruppe, welche eine reguläre Diedergruppe enthält, zweifach transitiv. Die Gruppe $\mathfrak{D}_{2k}$ ist daher noch transitiv in $2j-1$ Symbolen dargestellt, woraus $2j-1 \mid 2k$ und dann $j \leqq k$ folgt. In der gleichen Weise können wir aber $\mathfrak{G}$ auch darstellen als Permutationsgruppe der Nebenklassen nach $\mathfrak{D}_{2j}$, und wie eben ergibt sich dann $k \leqq j$. Somit ist $k = j$. Wegen $2j-1 = 2k-1 \mid 2k$ folgt $k = j = 1$, $(\mathfrak{G}) \leqq 4$ und $\mathfrak{G}$ ist auflösbar.

c) Sei nun $\mathfrak{D}_{2k}$ maximal in $\mathfrak{G}$, aber $\mathfrak{D}_{2j}$ nicht maximal in $\mathfrak{G}$. Wir dürfen wieder annehmen, daß eine maximale Obergruppe von $\mathfrak{D}_{2j}$ die Gestalt $\mathfrak{D}_{2j} \cdot \mathfrak{L}$ hat mit $(\mathfrak{L}) = 2$ und $\mathfrak{D}_{2k} = \mathfrak{Z}_k \cdot \mathfrak{L}$. Nun stellen wir $\mathfrak{G}$ wieder dar als transitive Permutationsgruppe der Nebenklassen nach $\mathfrak{D}_{2k}$. Wie eben ist diese Darstellung zweifach transitiv. Daher wird die Gruppe $\mathfrak{D}_{2k}$ noch transitiv und treu in $2j-1$ Symbolen dargestellt, ist aber gewiß keine reguläre Permutationsgruppe wegen $2k \neq 2j-1$. Diejenige Untergruppe $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{D}_{2k}$, welche noch ein weiteres der $2j-1$ Symbole fest läßt, ist somit von $\mathfrak{E}$ verschieden. $\mathfrak{U}$ enthält keinen Normalteiler von $\mathfrak{D}_{2k}$, da $\mathfrak{D}_{2k}$ in den $2j-1$ Symbolen transitiv ist. Nach Hilfssatz 2 hat $\mathfrak{U}$ die Ordnung 2. Daraus folgt nun $(\mathfrak{D}_{2k}) = 2k = (\mathfrak{U})\,(2j-1) = 2(2j-1)$, also $k = 2j-1 \neq 0$ (2). $\mathfrak{G}$ erlaubt in den noch zu untersuchenden Fällen eine Zerlegung $\mathfrak{G} = \mathfrak{Z}_k\{\mathfrak{L}\,\mathfrak{D}_{2j}\}$. Nun stellen wir $\mathfrak{G}$ dar als Permutationsgruppe vom Grad $2k$ der Nebenklassen nach $\mathfrak{D}_{2j}$, wobei $\mathfrak{D}_{2k}$ als reguläre Permutationsgruppe erscheint. Wegen $2 \nmid k$ enthält $\mathfrak{D}_{2k}$ auch ungerade Permutationen [s. Beweis zu Satz 1, e)]. $\mathfrak{N} = \mathfrak{G} \cap \mathfrak{A}_{2k}$ ist daher ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$ vom Index 2. $\mathfrak{Z}_k$ liegt in $\mathfrak{N}$, wie man der Zyklenzerlegung von Z entnimmt. Aus der Zerlegung $\mathfrak{G} = \mathfrak{Z}_k\{\mathfrak{L} \cdot \mathfrak{D}_{2j}\}$ für $\mathfrak{G}$ folgt daher eine Zerlegung $\mathfrak{N} = \mathfrak{Z}_k\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{N}$ mit $\mathfrak{R} < \mathfrak{L}\,\mathfrak{D}_{2j}$. Da $\mathfrak{D}_{2k}$ maximale Untergruppe von $\mathfrak{G}$ ist, können wir annehmen, daß $\mathfrak{D}_{2k}$ der Normalisator von $\mathfrak{Z}_k$ in $\mathfrak{G}$ ist. Der Normalisator von $\mathfrak{Z}_k$ in $\mathfrak{N}$ ist dann $\mathfrak{Z}_k$ selbst. Ist für ein geeignetes S $\mathfrak{Z}_k \neq \mathfrak{Z}_k^S$ und $\mathfrak{Z}_k \cap \mathfrak{Z}_k^S = \mathfrak{D} \neq \mathfrak{E}$, so ist $\mathfrak{D}$ charakteristische Untergruppe von $\mathfrak{Z}_k^S$ und $\mathfrak{Z}_k$, also $\mathfrak{D} \lhd \mathfrak{D}_{2k}$ und $\mathfrak{D} \lhd \mathfrak{D}_{2k}^S$ und dann auch $\mathfrak{D} \lhd \{\mathfrak{D}_{2k}, \mathfrak{D}_{2k}^S\} = \mathfrak{G}$; denn wegen $\mathfrak{Z}_k^S \neq \mathfrak{Z}_k$ gilt auch $\mathfrak{D}_{2k}^S \neq \mathfrak{D}_{2k}$ und daher $\{\mathfrak{D}_{2k}^S, \mathfrak{D}_{2k}\} = \mathfrak{G}$, da $\mathfrak{D}_{2k}$ maximale Untergruppe von $\mathfrak{G}$ ist. Ist aber stets $\mathfrak{Z}_k^S \cap \mathfrak{Z}_k = \mathfrak{E}$ für $\mathfrak{Z}_k^S \neq \mathfrak{Z}_k$, so folgt nach Hilfssatz 1, daß $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{N}$ invariant ist. $\mathfrak{R}$ ist als Untergruppe von $\mathfrak{L}\,\mathfrak{D}_{2j}$ auflösbar, denn $\mathfrak{L}\,\mathfrak{D}_{2j}$ ist auflösbar wegen $(\mathfrak{L}) = 2$. $\mathfrak{N}/\mathfrak{R} \cong \mathfrak{Z}_k$ ist ebenfalls auflösbar. Also ist auch $\mathfrak{N}$ auflösbar.

d) Zu behandeln ist nun noch der Fall, daß $\mathfrak{D}_{2k}$ und $\mathfrak{D}_{2j}$ beide nicht maximal in $\mathfrak{G}$ sind. Wir dürfen dann wieder annehmen, daß $\mathfrak{D}_{2k}$ und $\mathfrak{D}_{2j}$ in maximalen Untergruppen $\mathfrak{D}_{2k}\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{D}_{2j}\mathfrak{K}$ enthalten sind und daß $(\mathfrak{L}) = (\mathfrak{K}) = 2$ ist. Wieder

gilt $\mathfrak{D}_{2k} = \mathfrak{Z}_k \cdot \mathfrak{R}$ und $\mathfrak{D}_{2j} = \mathfrak{Z}_j \cdot \mathfrak{L}$. Stellen wir $\mathfrak{G}$ dar als Permutationsgruppe der Nebenklassen nach $\mathfrak{D}_{2k}\mathfrak{L}$, so wird wegen der Zerlegung $\mathfrak{G} = \{\mathfrak{D}_{2k}\mathfrak{L}\} \cdot \mathfrak{Z}_j$ von $\mathfrak{G}$ die Untergruppe $\mathfrak{Z}_j$ regulär dargestellt, und diese Darstellung von $\mathfrak{G}$ ist primitiv. Wieder können wir annehmen, daß die Darstellung treu ist, da sonst $\mathfrak{D}_{2k}\mathfrak{L}$ einen auflösbaren Normalteiler von $\mathfrak{G}$ enthalten würde. Nach einem Satz von I. SCHUR ist eine primitive Permutationsgruppe von zusammengesetztem Grad, welche eine reguläre zyklische Gruppe enthält, zweifach transitiv (s. [5]; einen einfachen Beweis gab WIELANDT in [8]). Dies tritt also ein, falls j keine Primzahl ist. Ist aber j eine Primzahl, so ist nach einem Satz von BURNSIDE (s. [1] S. 341) die Gruppe $\mathfrak{G}$ auflösbar oder die eben angegebene Darstellung ist zweifach transitiv. Wir dürfen das letztere annehmen, so daß in jedem Falle die Darstellung zweifach transitiv ist. Diejenige Untergruppe $\mathfrak{V}$ von $\mathfrak{D}_{2k}\mathfrak{L}$, welche noch eines der $j-1$ von $\mathfrak{D}_{2k}\mathfrak{L}$ transitiv permutierten Symbole fest läßt, enthält keinen Normalteiler von $\mathfrak{D}_{2k}\mathfrak{L}$, da $\mathfrak{D}_{2k}\mathfrak{L}$ in den $j-1$ Symbolen noch transitiv ist. Nun betrachten wir die Gruppe $\mathfrak{D}_{2k}\mathfrak{L}$ etwas genauer: $\mathfrak{D}_{2k}$ ist Normalteiler von $\mathfrak{D}_{2k}\mathfrak{L}$, da $\mathfrak{D}_{2k}$ wegen $(\mathfrak{L}) = 2$ in $\mathfrak{D}_{2k}\mathfrak{L}$ den Index 2 hat. Ist $k \neq 2$, so ist $\mathfrak{Z}_k$ eine charakteristische Untergruppe von $\mathfrak{D}_{2k}$, ist daher auch in $\mathfrak{D}_{2k}\mathfrak{L}$ invariant. (Der Fall $k = 2$ wurde schon in Satz 2 erledigt.) Ähnlich wie bei Hilfssatz 2 schließen wir nun, daß wegen $\mathfrak{V} \cap \mathfrak{Z}_k = \mathfrak{E}$ die Ordnung von $\mathfrak{V}$ ein Teiler von 4 ist. Der Index von $\mathfrak{V}$ in $\mathfrak{D}_{2k}\mathfrak{L}$, welcher $j-1$ ist, ist daher noch durch k teilbar. Daraus folgt $k < j$. Ebenso ist wegen der Symmetrie unserer Annahme auch $j < k$, was ein Widerspruch ist.

Literatur.

[1] BURNSIDE, W.: Theory of groups of finite order. Sec. edit. 1911. — [2] HUPPERT, B. Über das Produkt von paarweise vertauschbaren zyklischen Gruppen. Math. Z. **58**, 243—264 (1953). — [3] ITÔ, NOBORU: Remarks on factorisable groups. Acta Sci. Math. Szeged **14**, 83—84 (1951). — [4] ORE, O.: Contributions to the theory of groups of finite order. Duke Math. J. **5**, 431—460 (1938). — [5] SCHUR, I.: Zur Theorie der einfach transitiven Permutationsgruppen. Sitzgsber. Berl. Akad. **1933**, 598—623. — [6] SPEISER, A.: Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, 3. Aufl. 1937. — [7] SZÉP, J., u. L. RÉDEI: On factorisable groups. Acta Sci. Math. Szeged **13**, 235—238 (1950). — [8] WIELANDT, H.: Zur Theorie der einfach transitiven Permutationsgruppen. Math. Z. **40**, 582—587 (1936). — [9] WIELANDT, H.: Zur Theorie der einfach transitiven Permutationsgruppen. II. Math. Z. **52**, 384—393 (1950). — [10] WIELANDT, H.: Über das Produkt paarweise vertauschbarer nilpotenter Gruppen. Math. Z. **55**, 1—7 (1951).

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 11. März 1953)

KNOCHE, H.-G.
Math. Zeitschr. Bd. 59, S. 8—16 (1953)

Über den Frobeniusschen Klassenbegriff in nilpotenten Gruppen II[1]).

Von
HANS-GEORG KNOCHE.

Einleitung.

Um die Struktur von p-Gruppen zu untersuchen, ist es zweckmäßig, ein Maß für die Abweichung der Eigenschaften einer p-Gruppe von denen einer Abelschen Gruppe derselben Ordnung zu schaffen. So kann etwa die Länge der Zentralreihen oder die Länge der Reihe der Ableitungen als ein solches Maß angesehen werden. Wir führen im folgenden ein anderes ein, und zwar die *Breite* β einer p-Gruppe $\mathfrak{G}$, wenn p^β die größtmögliche Anzahl von Elementen aus $\mathfrak{G}$ ist, die in einer Klasse konjugierter Elemente enthalten sind. Gruppen der Breite 0 sind genau die Abelschen, solche der Breite 1 sind früher bereits behandelt worden[1]).

Im 1. Abschnitt werden einige Eigenschaften von p-Gruppen beliebiger Breite angegeben. Dabei ergibt sich, daß Gruppen der Breite 2 höchstens die Klasse 3 (Satz 2) und Gruppen der Breite 3 höchstens die Klasse 4 haben können (Satz 3). Im 2. Abschnitt werden die Gruppen der Breite 2 näher untersucht. Es wird gezeigt, daß die FRATTINI-Gruppe dieser Gruppen Abelsch ist (Satz 4) und die Kommutatorgruppe höchstens die Ordnung p^3 haben kann (Satz 5 und 6), wodurch man einen Einblick in die Struktur dieser Gruppen gewinnt. Am Schluß werden Beispiele für Gruppen der Breite 2 angeführt.

Ich möchte Herrn Professor WIELANDT für die Ratschläge danken, die er mir bei der Abfassung dieser Arbeit erteilt hat.

1.1. Bezeichnungen.

Große Frakturbuchstaben bezeichnen endliche p-Gruppen, d.h. Gruppen mit einer Ordnung p^n, große lateinische Buchstaben Elemente dieser Gruppen. Die Glieder der aufsteigenden Zentralreihe einer Gruppe $\mathfrak{G}$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{Z}_i(\mathfrak{G}) = \mathfrak{Z}_i (i = 0, 1, \ldots, c)$, die der absteigenden Zentralreihe mit $\mathfrak{H}_j(\mathfrak{G}) = \mathfrak{H}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, c+1)$, wobei $c(\mathfrak{G}) = c$ die Klasse von $\mathfrak{G}$ ist[2]). $\Phi(\mathfrak{G}) = \Phi$ bezeichne die FRATTINI-Gruppe von $\mathfrak{G}$[3]). $(A, B) = A^{-1}B^{-1}AB$ ist der Kommutator von A und B, $(A, B, C) = ((A, B), C)$ der Kommutator von (A, B) und C. Sind $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2$ beliebige Gruppen, so verstehen wir unter $(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$ die

[1]) Der erste Teil dieser Arbeit erschien in Math. Z. **55**, 71—82 (1951); er wird im folgenden mit „I" zitiert.

[2]) ZASSENHAUS, H.: Lehrbuch der Gruppentheorie, S. 104 u. 118. 1937.

[3]) a. a. O. [2]), S. 44.

von allen Kommutatoren (H_1, H_2) erzeugte Gruppe, mit $H_i \in \mathfrak{H}_i$. Entsprechend soll unter $(\mathfrak{H}, A)$ die von allen Kommutatoren (H, A) mit $H \in \mathfrak{H}$ erzeugte Gruppe verstanden werden. Sind $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2$ Komplexe von Elementen einer Gruppe, so bezeichnet $\{\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2\}$ die von $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ erzeugte Gruppe. $\mathfrak{N}_0(A)$ ist der Normalisator eines Elementes $A \in \mathfrak{G}$, $\mathfrak{N}_1(A)$ der Normalisator erster Stufe (I, S. 72ff.) von A, d. i. die Gesamtheit der Elemente $X \in \mathfrak{G}$, für die der Kommutator (X, A) in $\mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G})$ liegt. Die Gruppe $(\mathfrak{N}_1(A), A)$ wird mit $\mathfrak{Z}^*(A)$ bezeichnet. Unter $(\mathfrak{H})$ verstehen wir die Ordnung von $\mathfrak{H}$. Ist $\mathfrak{H}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$, so bezeichnet $\mathfrak{G} - \mathfrak{H}$ die zu $\mathfrak{H}$ komplementäre Menge der Elemente von $\mathfrak{G}$.

1.2. Einige bekannte Eigenschaften von p-Gruppen.

a) $\mathfrak{G}$ ist auflösbar und jede Untergruppe von $\mathfrak{G}$ kommt in einer Kompositionsreihe von $\mathfrak{G}$ vor[4]). b) Der Normalisator einer echten Untergruppe von $\mathfrak{G}$ ist von ihr verschieden[4]). Daher ist jede Untergruppe vom Index p unter $\mathfrak{G}$ Normalteiler von $\mathfrak{G}$. c) Der Durchschnitt zweier Normalteiler vom Index p unter $\mathfrak{G}$ hat den Index p^2 unter $\mathfrak{G}$[5]). d) Es gelten die Formeln[6]) $(A, BC) = (A, C)\,(A, B)\,(A, B, C)$, $(AB, C) = (A, C)\,(A, C, B)\,(B, C)$. Ist der Kommutator (A, B) mit C vertauschbar, so wird $(A, B, C) = E$ und $(A, BC) = (A, C)\,(A, B)$. e) Ist $\mathfrak{N}$ Normalteiler von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}_{i+1}(\mathfrak{G}) \leqq \mathfrak{N}$, jedoch $\mathfrak{H}_i \not\leqq \mathfrak{N}$, so ist $c(\mathfrak{G}/\mathfrak{N}) = i$ und umgekehrt[7]). f) Eine Gruppe der Ordnung $\leqq p^2$ ist Abelsch; daher enthält ein Normalteiler vom Index $\leqq p^2$ unter $\mathfrak{G}$ die Kommutatorgruppe $\mathfrak{H}_2(\mathfrak{G})$. Eine Gruppe der Ordnung p^3 hat die Klasse $\leqq 2$[8]). g) Ist $\mathfrak{H}$ eine echte Untergruppe von $\mathfrak{G}$, so gilt $\{\mathfrak{G} - \mathfrak{H}\} = \mathfrak{G}$.

1.3. Über den Begriff der Breite in p-Gruppen.

Definition 1. Die Anzahl der mit $A \in \mathfrak{G}$ konjugierten Elemente $H^{-1}AH$, die bei Transformation von A mit allen Elementen der Untergruppe $\mathfrak{H} \leqq \mathfrak{G}$ entstehen, sei p^a; dann heiße *a die Breite von A unter* $\mathfrak{H}$. Wir schreiben dafür $a = \beta(A^{\mathfrak{H}})$.

Insbesondere nennen wir $\beta(A^{\mathfrak{G}}) = \beta(A)$ kürzer die *Breite von A* oder auch die *Breite der Klasse von A*. Ist $\mathfrak{N} \leqq \mathfrak{G}$ Normalteiler von $\mathfrak{N}\mathfrak{H}$, so gibt es unter den Breiten der Elemente $N \in \mathfrak{N}$ unter $\mathfrak{H}$ eine größte. Sie heiße die Breite von $\mathfrak{N}$ unter $\mathfrak{H}$. Wir schreiben dafür $\beta(\mathfrak{N}^{\mathfrak{H}})$. Die Breite einer Untergruppe $\mathfrak{H} \leqq \mathfrak{G}$ unter $\mathfrak{H}$, d. i. die größte Breite, die ein Element $H \in \mathfrak{H}$ unter $\mathfrak{H}$ haben kann, nennen wir kürzer die Breite von $\mathfrak{H}$ und schreiben dafür $\beta(\mathfrak{H})$.

Sind $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}^*$ beliebige Untergruppen von $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{N}$ Normalteiler von $\mathfrak{H}$, $A \in \mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H} \leqq \mathfrak{H}^*$, so bestehen folgende Beziehungen: a) $\beta(A^{\mathfrak{H}}) \leqq \beta(A^{\mathfrak{H}^*})$.

[4]) Speiser, A.: Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, 2. Aufl., S. 69. 1927.
[5]) a. a. O. [4]), Satz 24.
[6]) Hall, P.: A contribution to the theory of groups of prime-power order. Proc. London Math. Soc. (2) **36**, 43 (1934).
[7]) a. a. O. [6]), p. 52.
[8]) a. a. O. [2]), S. 105.

b) $\beta(A\,\mathfrak{N}^{\mathfrak{H}}\,\mathfrak{N}) \leqq \beta(A^{\mathfrak{H}})$. c) Die umfassendste Untergruppe von $\mathfrak{G}$, die der Gleichung $\beta(\mathfrak{N}^{\mathfrak{H}}) = 0$ genügt, ist der Zentralisator $\tilde{\mathfrak{H}}$ von $\mathfrak{N}$. d) Genau dann gilt $\beta(\mathfrak{H}) = 0$, wenn $\mathfrak{H}$ Abelsch ist.

Satz 1. *Die Breite eines direkten Produktes von p-Gruppen ist gleich der Summe der Breiten der direkten Faktoren.*

Beweis. Es genügt, den Satz für direkte Produkte $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2$ von zwei Faktoren zu beweisen.

Sei $A \in \mathfrak{G}_1$ ein Element der Breite a und $B \in \mathfrak{G}_2$ von der Breite b. Der Normalisator von A umfaßt $\mathfrak{G}_2$, der von B umfaßt $\mathfrak{G}_1$. Dann wird $\mathfrak{G}_1\,A\,B$ in p^a konjugierte Elemente der Gestalt $A\,B\,K$ transformieren, wo $K \in (\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_1)$. Jedes dieser Elemente wird aber durch Transformation mit Elementen von $\mathfrak{G}_2$ in p^b Elemente der Gestalt $A\,B\,K\,K'$ transformiert, mit $K' \in (\mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_2)$. Diese Elemente sind alle verschieden, so daß $A\,B$ die Breite $a+b$ hat.

1.4. Einige Sätze über p-Gruppen.

Hilfssatz 1. *Es sei $A \in \mathfrak{G}$, $\beta(A) = 2$ und $\mathfrak{N}_0(A)$ nicht Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Gibt es dann ein Element $B \in \mathfrak{G}$ mit $\beta(B) \leqq 2$, welches nicht in dem Normalisator $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{N}_0(A)$ liegt, so hat $\bigcap_{X \in \mathfrak{G}} X^{-1}\mathfrak{N}_0(A)\,X$ den Index p^3 unter $\mathfrak{G}$.*

Beweis. $\mathfrak{N}$ ist eine maximale Untergruppe von $\mathfrak{G}$, also Normalteiler (1.2, b); denn $\mathfrak{N}_0(A)$ ist von $\mathfrak{N}$ verschieden (1.2, b) und wäre $\mathfrak{N} = \mathfrak{G}$, so wäre $\mathfrak{N}_0(A)$ Normalteiler von $\mathfrak{G}$.

Der Durchschnitt $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{N}_0(A) \cap B^{-1}\mathfrak{N}_0(A)\,B$ zentralisiert A und $B^{-1}A\,B = A\,(A, B)$ und damit auch $(A, B) = K$; es gilt $\mathfrak{D}_1 \leqq \mathfrak{N}_0(K)$. Als Durchschnitt zweier verschiedener maximaler Untergruppen von $\mathfrak{N}$ ist $\mathfrak{D}_1$ Normalteiler von $\mathfrak{N}$ mit dem Index p^2 unter $\mathfrak{N}$ (1.2, c), also mit dem Index p^3 unter $\mathfrak{G}$. Die Behauptung von Hilfssatz 1 läuft also darauf hinaus, daß $\bigcap_{X \in \mathfrak{G}} X^{-1}\mathfrak{N}_0(A)\,X = \mathfrak{D}_1$.

Der Durchschnitt $\mathfrak{D}_2 = \mathfrak{N}_0(B) \cap A^{-1}\mathfrak{N}_0(B)\,A$ zentralisiert B und $A^{-1}B\,A = B(B, A)$, also auch $(B, A) = K^{-1}$; es gilt $\mathfrak{D}_2 \leqq \mathfrak{N}_0(K)$. Wenn $\mathfrak{D}_2$ von $\mathfrak{N}_0(B)$ verschieden ist, ist $\mathfrak{N}_0(B)$ nicht Normalteiler, und man findet wie bei $\mathfrak{D}_1$, daß $\mathfrak{D}_2$ den Index p^3 unter $\mathfrak{G}$ hat. Der Index von $\mathfrak{D}_2$ unter $\mathfrak{G}$ ist höchstens p^3.

Da $\mathfrak{G}$ durch $\mathfrak{N}$ und B erzeugt wird, ist $\bigcap_i B^{-i}\mathfrak{N}_0(A)\,B^i = \bigcap_{X \in \mathfrak{G}} X^{-1}\mathfrak{N}_0(A)\,X$, $(i = 0, 1, \ldots, p-1)$.

Ist $\mathfrak{D}_1$ Normalteiler von $\mathfrak{G}$, so gilt $\mathfrak{D}_1 \leqq \bigcap_{X \in \mathfrak{G}} X^{-1}\mathfrak{N}_0(A)\,X$. Andererseits ist aber $\bigcap_{X \in \mathfrak{G}} X^{-1}\mathfrak{N}_0(A)\,X \leqq \mathfrak{D}_1$, folglich $\mathfrak{D}_1 = \bigcap_{X \in \mathfrak{G}} X^{-1}\mathfrak{N}_0(A)\,X$.

1. Ist $\mathfrak{N}_0(K)$ Normalteiler oder $(K, B) \in \mathfrak{Z}_1$, so wird $\mathfrak{N}_0(B^{-i}K\,B^i) = B^{-i}\mathfrak{N}_0(K)\,B^i = \mathfrak{N}_0(K)$ $(i = 1, 2, \ldots, p-1)$, so daß $\mathfrak{N}_0(K)$ auch $B^{-i}K\,B^i = K(K, B^i)$, also (K, B^i) zentralisiert. Nun gilt (1.2, d) $(A, B^{i+1}) = (A, B^i)\,(A, B)\,(A, B, B^i)$. Für $i = 1$ zentralisiert $\mathfrak{N}_0(K)$ alle Elemente der rechten Seite dieser Gleichung, also auch (A, B^2), ebenso (A, B^3), ... und (A, B^{p-1}). Daher zentralisiert $\mathfrak{D}_1 \leqq \mathfrak{N}_0(K)$ $A(A, B^i) = B^{-i}A\,B^i$ für $i = 1, \ldots, p-1$. Das bedeutet, daß $\mathfrak{D}_1$ in jedem Normalisator $\mathfrak{N}_0(B^{-i}A\,B^i) = B^{-i}\,\mathfrak{N}_0(A)\,B^i$ für $i = 0, \ldots, p-1$ enthalten ist, also auch in deren Durchschnitt $\bigcap_i B^{-i}\mathfrak{N}_0(A)\,B^i$.

Und da andererseits dieser Durchschnitt in $\mathfrak{T}_1$ liegt, wird $\mathfrak{T}_1 = \bigcap_i B^{-i}\mathfrak{N}_0(A)B^i = \bigcap_{X\in\mathfrak{G}} X^{-1}\mathfrak{N}_0(A)X$.

2. Wir unterscheiden nun die Fälle a) $\mathfrak{N}_0(K) \not\subseteq \mathfrak{N}$ und b) $\mathfrak{N}_0(K) \subseteq \mathfrak{N}$.

a) Wir können wegen 1. annehmen, daß $\mathfrak{N}_0(K)$ nicht Normalteiler ist. Dann ist $\mathfrak{N}_0(K)$ in einer maximalen Untergruppe $\mathfrak{N}' \neq \mathfrak{N}$ enthalten (1.2, b), und $\mathfrak{T}_1 \subseteq \mathfrak{N}_0(K)$ liegt in $\mathfrak{T} = \mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}'$. $\mathfrak{T}$ ist ein Normalteiler des Index p^2 unter $\mathfrak{G}$ (1.2, c) und von $\mathfrak{N}_0(A)$ verschieden, da $\mathfrak{N}_0(A)$ nicht Normalteiler sein sollte, ebenso von $B^{-1}\mathfrak{N}_0(A)B$ verschieden. Somit liegt $\mathfrak{T}_1$ im Durchschnitt zweier verschiedener maximaler Untergruppen von $\mathfrak{N}$ und muß wegen der Ordnung von $\mathfrak{T}_1$ mit diesem Durchschnitt übereinstimmen (1.2, c), $\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T} \cap \mathfrak{N}_0(A)$ und entsprechend $\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T} \cap B^{-1}\mathfrak{N}_0(A)B$. Damit wird $B^{-1}\mathfrak{T}_1 B = B^{-1}\mathfrak{T}B \cap B^{-1}\mathfrak{N}_0(A)B = \mathfrak{T} \cap B^{-1}\mathfrak{N}_0(A)B = \mathfrak{T}_1$ und weiter $B^{-2}\mathfrak{T}_1 B^2 = B^{-1}\mathfrak{T}_1 B = \mathfrak{T}_1$, usw. $\mathfrak{T}_1$ ist Normalteiler, woraus dann unsere Behauptung folgt, wie wir oben gezeigt haben.

b) Wir setzen in diesem Falle $(K, B) \notin \mathfrak{Z}_1$ voraus, was wegen 1. keine Einschränkung bedeutet.

Da $\mathfrak{T}_2 \subseteq \mathfrak{N}_0(K)$ liegt $\{K, \mathfrak{T}_2\}$ in $\mathfrak{N}_0(K) \subseteq \mathfrak{N}$. Andererseits ist $\mathfrak{T}_2$ in einer maximalen Untergruppe $\mathfrak{N}''$ von $\mathfrak{G}$ enthalten, die $\mathfrak{N}_0(B)$ enthält [1.2, b, und da $\mathfrak{N}_0(B) = \mathfrak{G}$ $B \in \mathfrak{Z}_1 < \mathfrak{N}_0(A) < \mathfrak{N}$ bedeuten würde]. $\mathfrak{N}''$ ist von $\mathfrak{N}$ verschieden, da $B \notin \mathfrak{N}$. $\mathfrak{N}''$ enthält auch K (1.2, f), mithin $\{K, \mathfrak{T}_2\}$. Also ist $\{K, \mathfrak{T}_2\} \subseteq \mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}''$. Nun hat $\mathfrak{T}_2$ höchstens den Index p^3 unter $\mathfrak{G}$, und wegen $(K, B) \notin \mathfrak{Z}_1$ ist $K \notin \mathfrak{T}_2$, so daß $\{K, \mathfrak{T}_2\}$ höchstens den Index p^2 unter $\mathfrak{G}$ hat. Folglich ist $\{K, \mathfrak{T}_2\} = \mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}''$ (1.2, c) Normalteiler von $\mathfrak{G}$, also auch $\mathfrak{N}_0(K)$, womit dieser Fall auf 1. zurückgeführt ist.

Satz 2. *Es sei $\mathfrak{L}$ ein Komplex von Elementen $L_i \in \mathfrak{G}$ mit $\beta(L_i) \leq 2$. Dann gilt $c(\{\mathfrak{L}\}) \leq 3$.*

Beweis. Die Elemente $L_i \in \mathfrak{L}$ mögen die Untergruppe $\mathfrak{B}$ erzeugen, $\{\mathfrak{L}\} = \mathfrak{B}$. Dann gilt $\beta(L_i^{\mathfrak{B}}) \leq \beta(L_i) \leq 2$ (1.3, a).

1. Gibt es ein $L_1 \in \mathfrak{L}$ mit $\beta(L_1^{\mathfrak{B}}) \leq 1$, so enthält $\mathfrak{N}_0(L_1)$*) die Kommutatorgruppe $\mathfrak{H}_2(\mathfrak{B})$ (1.2, b und f).

2. Gibt es ein $L_2 \in \mathfrak{L}$ mit $\beta(L_2^{\mathfrak{B}}) = 2$ und ist a) $\mathfrak{N}_0(L_2)$ Normalteiler von $\mathfrak{B}$, so gilt auch $\mathfrak{N}_0(L_2) \supseteq \mathfrak{H}_2(\mathfrak{B})$ (1.2, f). b) Wenn $\mathfrak{N}_0(L_2)$ nicht Normalteiler von $\mathfrak{B}$ ist, so sei $\mathfrak{N} \neq \mathfrak{B}$ der Normalisator von $\mathfrak{N}_0(L_2)$ in $\mathfrak{B}$. Dann ist $\mathfrak{L}$ nicht in $\mathfrak{N}$ enthalten, da $\{\mathfrak{L}\} = \mathfrak{B}$. Es gibt also ein $L \in \mathfrak{L}$, welches nicht in $\mathfrak{N}$ liegt. Nach Hilfssatz 1 hat dann $\mathfrak{T} = \bigcap_{X\in\mathfrak{B}} X^{-1}\mathfrak{N}_0(L_2)X$ den Index p^3 unter $\mathfrak{B}$. $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}$ hat die Ordnung p^3 und (1.2, f) die Klasse ≤ 2, so daß $\mathfrak{T} \supseteq \mathfrak{H}_3(\mathfrak{B})$ gilt (1.2, e), also $\mathfrak{H}_3(\mathfrak{B}) \subseteq \mathfrak{N}_0(L_2)$.

Wegen $\mathfrak{H}_3(\mathfrak{B}) \subseteq \mathfrak{H}_2(\mathfrak{B})$ gilt somit $\mathfrak{H}_3(\mathfrak{B}) \subseteq \mathfrak{N}_0(L_i)$ für alle $L_i \in \mathfrak{L}$, oder $(\mathfrak{H}_3(\mathfrak{B}), \mathfrak{L}) = (\mathfrak{H}_3(\mathfrak{B}), \{\mathfrak{L}\}) = \mathfrak{E}$. Folglich ist $\mathfrak{H}_3(\mathfrak{B})$ in $\mathfrak{Z}_1(\mathfrak{B})$, $\mathfrak{H}_4(\mathfrak{B})$ in $\mathfrak{E}$ enthalten und $c(\mathfrak{B}) \leq 3$ (1.2, e).

Korollar. *Ist $\beta(\mathfrak{G}) = 2$, so gilt $c(\mathfrak{G}) \leq 3$.*

Satz 3. *Ist $\beta(\mathfrak{G}) = 3$, so gilt $c(\mathfrak{G}) \leq 4$.*

*) $\mathfrak{N}_0(L_i)$ bedeutet den Normalisator von L_i in $\mathfrak{B}$.

Beweis. Der Zentralisator $\mathfrak{C}(\mathfrak{Z}_2)=\mathfrak{C}$ ist von $\mathfrak{G}$ verschieden, da $\mathfrak{G}$ nicht Abelsch ist. Wenn $A\in\mathfrak{G}-\mathfrak{C}$, gilt in der Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}_1$ $\beta(A\,\mathfrak{Z}_1)<\beta(A)$; denn wäre $\beta(A\,\mathfrak{Z}_1)=\beta(A)$, müßte (I, S. 73) $\mathfrak{N}_1(A)/\mathfrak{Z}_1=\mathfrak{N}_0(A\,\mathfrak{Z}_1)=\mathfrak{N}_0(A)/\mathfrak{Z}_1$, d.h. $\mathfrak{N}_1(A)=\mathfrak{N}_0(A)$ sein; und da stets $\mathfrak{Z}_2\leqq\mathfrak{N}_1(A)$ (I, Satz 1) gilt, wäre $\mathfrak{Z}_2\leqq\mathfrak{N}_0(A)$, also $A\in\mathfrak{C}$. Folglich haben alle Elemente von $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}_1-\mathfrak{C}/\mathfrak{Z}_1$ höchstens die Breite 2. Dann hat nach Satz 2 $\{\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}_1-\mathfrak{C}/\mathfrak{Z}_1\}=\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}_1$ (1.2, g) höchstens die Klasse 3. Daher ist $c(\mathfrak{G})\leqq 4$.

2. Gruppen der Breite 2.

Im folgenden bezeichnet $\mathfrak{G}$ immer eine p-Gruppe der Breite 2 ($p>2$). Wir haben bereits in Satz 2 gesehen, daß $\mathfrak{G}$ höchstens die Klasse 3 hat. Dieses Ergebnis gestattet uns, weitere Sätze über diese Gruppen anzugeben.

Satz 4. *$\Phi(\mathfrak{G})$ ist Abelsch.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß $X^p\in\mathfrak{Z}_2$, $X^{p^2}\in\mathfrak{Z}_1$ für jedes $X\in\mathfrak{G}$. Der Zentralisator $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{Z}_2$ ist von $\mathfrak{G}$ verschieden, da $\mathfrak{G}$ nicht Abelsch ist. Für $A\in\mathfrak{G}-\mathfrak{C}$ gilt $\mathfrak{N}_1(A)>\mathfrak{N}_0(A)$; denn andernfalls wäre $\mathfrak{Z}_2\leqq\mathfrak{N}_1(A)=\mathfrak{N}_0(A)$ (I, Satz 1), mithin $(\mathfrak{Z}_2, A)=\mathfrak{E}$, $A\in\mathfrak{C}$. Da $\mathfrak{N}_0(A)$ höchstens den Index p^2 unter $\mathfrak{G}$ hat, ist der Index von $\mathfrak{N}_1(A)\leqq p$. Sei $X\in\mathfrak{G}$, so wird $X^p\in\mathfrak{N}_1(A)$, also $(X^p, A)\in\mathfrak{Z}_1$. Daher wird $(X^p, \mathfrak{G}-\mathfrak{C})\leqq\mathfrak{Z}_1$, folglich auch $(X^p, \{\mathfrak{G}-\mathfrak{C}\})=(X^p, \mathfrak{G})\leqq\mathfrak{Z}_1$ (1.2, g), $X^p\in\mathfrak{Z}_2$. Ferner ist $X^{p^2}\in\mathfrak{N}_0(A)$ für alle $A\in\mathfrak{G}$, mithin $X^{p^2}\in\mathfrak{Z}_1$. Somit wird (1.2, d) $(X, Y^p)^p=(X^p, Y^p)=(X, Y^{p^2})=E$ für beliebige Elemente $X, Y\in\mathfrak{G}$. Alle p-ten Potenzen sind miteinander vertauschbar. Nun ist $\mathfrak{Z}_2$ in dem Zentralisator $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{H}_2$ enthalten [9]), und wegen $\mathfrak{H}_2\leqq\mathfrak{Z}_2$ gilt auch $\Phi\leqq\mathfrak{Z}_2\leqq\mathfrak{M}$, da Φ von allen X^p, für $X\in\mathfrak{G}$, und $\mathfrak{H}_2$ erzeugt wird. Daraus ergibt sich die Behauptung.

Hilfssatz 2. *Ist $c(\mathfrak{G})=2$, so wird $\mathfrak{G}$ von allen Elementen der Breite 2 erzeugt.*

Beweis. Die Elemente der Breite 2 erzeugen den Normalteiler $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{G}$. Wenn $Z\in\mathfrak{Z}_1$, ist für jedes $X\in\mathfrak{G}$ $\beta(XZ)=\beta(X)$. Für R mit $\beta(R)=2$ gilt $\beta(RZ)=2$, also $RZ=R'\in\mathfrak{R}$ und $Z\in\mathfrak{R}$; es ist $\mathfrak{Z}_1<\mathfrak{R}$. Ist $\mathfrak{R}\neq\mathfrak{G}$, so sei $A\in\mathfrak{G}$ nicht in $\mathfrak{R}$. Dann ist für $AR=B$ $\beta(B)=1$, wenn $\beta(R)=2$. Nun ist wegen $c(\mathfrak{G})=2$ $\mathfrak{N}_1(A)=\mathfrak{N}_1(B)=\mathfrak{G}$ (I, Satz 1), so daß $\mathfrak{Z}^*(A)$ wegen $\mathfrak{N}_1(A)/\mathfrak{N}_0(A)\cong\mathfrak{Z}^*(A)$ (I, S. 73) die Ordnung p hat, ebenso $\mathfrak{Z}^*(B)$. Ist $\mathfrak{Z}^*(A)\cap\mathfrak{Z}^*(B)\neq\mathfrak{E}$, muß $\mathfrak{Z}^*(A)=\mathfrak{Z}^*(B)$ sein und daher $(\mathfrak{G}, A^{-1}B)=\mathfrak{Z}^*(A^{-1}B)\leqq\mathfrak{Z}^*(A)$. Folglich hätte $A^{-1}B=R$ eine Breite $\leqq 1$, was nicht sein sollte. Also ist $\mathfrak{Z}^*(A)\cap\mathfrak{Z}^*(B)=\mathfrak{E}$.

Gibt es nun ein Element $X\in\mathfrak{G}$, das mit $A^{-1}B$, jedoch nicht mit AB vertauschbar ist, so wird $(X, A^{-1}B)=(X, A^{-1})(X, B)=E$ (1.2, d), also $(X, A)=(X, B)\neq E$, was wegen $\mathfrak{Z}^*(A)\cap\mathfrak{Z}^*(B)=\mathfrak{E}$ nicht sein kann. Folglich haben $A^{-1}B$ und AB denselben Normalisator und dieselbe Breite $\beta(A^{-1}B)=\beta(AB)=2$. Es ist $A^{-1}B\in\mathfrak{R}$ und $AB\in\mathfrak{R}$, also auch $A^2\in\mathfrak{R}$ und deshalb wegen $p>2$ auch $A\in\mathfrak{R}$ gegen die Voraussetzung.

Satz 5. *Ist $c(\mathfrak{G})=2$, dann gilt: a) Wenn $\Phi\leqq\mathfrak{Z}_1$, ist $\mathfrak{H}_2$ elementar Abelsch und $(\mathfrak{H}_2)\leqq p^3$. Ist $(\mathfrak{H}_2)=p^3$, so enthält $\mathfrak{G}$ kein Element der Breite 1. b) Wenn $\Phi\not\leqq\mathfrak{Z}_1$, ist $\mathfrak{H}_2$ zyklisch, $(\mathfrak{H}_2)=p^2$, und $\mathfrak{G}$ enthält Elemente der Breite 1.*

[9]) a. a. O. [2]), S. 121.

Beweis. a) Wenn $\Phi \leqq \mathfrak{Z}_1$, liegt $X^p \in \mathfrak{Z}_1$ für $X \in \mathfrak{G}$, und es wird $(X, Y)^p = (X^p, Y) = E$ (1.2, d) für alle $Y \in \mathfrak{G}$. $\mathfrak{H}_2$ ist elementar Abelsch. Nun sei $(\mathfrak{H}_2) \geq p^3$. Wir nehmen an, es gäbe $T \in \mathfrak{G}$ mit $\beta(T) = 1$. Dann ist wegen $c(\mathfrak{G}) = 2$ $\mathfrak{N}_1(T) = \mathfrak{G}$ und $(\mathfrak{Z}^*(T)) = p$ (I, S. 73). Die Kommutatorgruppe von $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}^*(T) = \mathfrak{G}^*$ ist $\mathfrak{H}_2(\mathfrak{G}^*) = \mathfrak{H}_2(\mathfrak{G})/\mathfrak{Z}^*(T)$, da $\mathfrak{Z}^*(T) < \mathfrak{H}_2(\mathfrak{G})$. Es ist $(\mathfrak{H}_2(\mathfrak{G}^*)) \geq p^2$ und $\beta(\mathfrak{G}^*) = 2$ (1.3, b und I, Satz 2). Sei $A \in \mathfrak{G}$ und $\beta(A\,\mathfrak{Z}^*(T)) = 2$. Dann muß $\mathfrak{Z}^*(A) \cap \mathfrak{Z}^*(T) = \mathfrak{E}$ sein; denn sonst gäbe es $Y \in \mathfrak{G} - \mathfrak{N}_1(A)$ mit $(Y, A) \neq E$, $(Y, A) \in \mathfrak{Z}^*(T)$, und $A\,\mathfrak{Z}^*(T)$ würde von $\{Y, \mathfrak{N}_0(A)\}\,\mathfrak{Z}^*(T)$ zentralisiert, einem Normalteiler vom Index p unter $\mathfrak{G}^*$, hätte also nicht die Breite 2. Wegen $(T, A) \in \mathfrak{Z}^*(A) \cap \mathfrak{Z}^*(T) = \mathfrak{E}$ muß $A \in \mathfrak{N}_0(T)$ gelten. Andererseits erzeugen alle $A\,\mathfrak{Z}^*(T)$ mit $\beta(A\,\mathfrak{Z}^*(T)) = 2$ nach Hilfssatz 2 schon die ganze Gruppe $\mathfrak{G}^*$, was nicht sein kann, wenn sie in $\mathfrak{N}_0(T)/\mathfrak{Z}^*(T)$ liegen. Für $(\mathfrak{H}_2) \geq p^3$ enthält $\mathfrak{G}$ kein Element der Breite 1.

Nun sei $(\mathfrak{H}_2) > p^3$, $A \in \mathfrak{G}$ mit $\beta(A) = 2$, $\mathfrak{Z}^*(A) = \{A_1, A_2\}$. Dann hat $\mathfrak{Z}^*(A\{A_1\}) = \mathfrak{Z}^*(A)/\{A_1\}$ in $\mathfrak{G}/\{A_1\}$ die Ordnung p, $\mathfrak{N}_0(A\{A_1\})$ den Index p unter $\mathfrak{G}/\{A_1\}$ (I, S. 73), also $A\{A_1\}$ die Breite 1. Aber die Kommutatorgruppe von $\mathfrak{G}/\{A_1\}$ hat eine Ordnung $\geq p^3$. Wie wir oben gesehen haben, kann $\mathfrak{G}/\{A_1\}$ dann kein Element der Breite 1 enthalten. Es ist $(\mathfrak{H}_2) \leq p^3$.

b) Da $\Phi \nleqq \mathfrak{Z}_1$, gibt es ein $A \in \mathfrak{G}$ so, daß $A^p \notin \mathfrak{Z}_1$. A^p liegt sicher nicht in allen Normalisatoren. Sei $A^p \notin \mathfrak{N}_0(B)$; dann ist $\mathfrak{Z}^*(B) \cong \mathfrak{G}/\mathfrak{N}_0(B)$ (I, S. 73) zyklisch von der Ordnung p^2, $(A, B) = K \neq E$ und $(A, B)^p = (A^p, B) = K^p \neq E$ (1.2, d).

Wir wählen $X \in \mathfrak{G} - \mathfrak{N}$, wobei $\mathfrak{N} = \{A^p, \mathfrak{N}_0(B)\}$. Dann liegt X in einer Nebengruppe $A^i\mathfrak{N}_0(B)$, wobei $i \not\equiv 0 (p)$. Es wird (1.2, d) $(X, B) = (A^i, B) = (A, B)^i = K^i$. Weil $K^{ip} = (X, B)^p = (X, B^p) \neq E$, muß $\beta(X) = 2$ und $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}_0(X)$ zyklisch sein; denn sonst wäre $B^p \in \mathfrak{N}_0(X)$. Ferner ist $\mathfrak{Z}^*(X) = \mathfrak{Z}^*(B) = \{K\}$. Ist $X_1 \in \mathfrak{G} - \mathfrak{N}$ von X verschieden, so wird auch $\mathfrak{Z}^*(X_1) = \{K\}$, folglich (1.2, d) $\mathfrak{Z}^*(X_1 X) \leqq \{K\}$. Daher gilt $(\mathfrak{G}, \mathfrak{G} - \mathfrak{N}) = (\mathfrak{G}, \{\mathfrak{G} - \mathfrak{N}\}) = \{K\}$, also (1.2, g) $\mathfrak{H}_2 = \{K\}$.

Nun ist $(A^p, B^p) = (A, B)^{p^2} = E$, jedoch $(A, B^p) \neq E$, und daher $\mathfrak{N} = \{A^p, \mathfrak{N}_0(B)\} = \mathfrak{N}_0(B^p)$, folglich $\beta(B^p) = 1$.

Satz 6. *Ist $c(\mathfrak{G}) = 3$, so gilt: a) $\beta(\mathfrak{G}/\mathfrak{H}_3) = 1$. b) $\mathfrak{G}/\mathfrak{M} \cong \mathfrak{H}_3$, wobei $\mathfrak{M}$ der Zentralisator von $\mathfrak{H}_2$ ist; $(\mathfrak{H}_3) = p^h$, $(\mathfrak{H}_2) = p^{h+1}$, wenn $h = \beta(\mathfrak{H}_2^{\mathfrak{G}})$; es ist $h = 1, 2$.*

Beweis. a) Gäbe es in $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}_3$ ein Element $A\,\mathfrak{H}_3$ der Breite 2, so wäre $A \in \mathfrak{M}$; denn andernfalls wäre $(\mathfrak{H}_2, A) \neq \mathfrak{E}$ und daher $\mathfrak{N}_0(A\,\mathfrak{H}_3) \geqq \{\mathfrak{H}_2, \mathfrak{N}_0(A)\}/\mathfrak{H}_3$ größer als $\mathfrak{N}_0(A)/\mathfrak{H}_3$, also $\beta(A\,\mathfrak{H}_3) < \beta(A)$. Alle Elemente der Breite 2 von $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}_3$ lägen in einer echten Untergruppe $\mathfrak{M}/\mathfrak{H}_3$ von $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}_3$. Andererseits erzeugen sie nach Hilfssatz 2 die ganze Gruppe, was dann nicht sein könnte. Also ist $\beta(\mathfrak{G}/\mathfrak{H}_3) = 1$.

b) Nach einem früheren Satz hat die Kommutatorgruppe von $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}_3$ die Ordnung p (I, Satz 2). $\mathfrak{H}_2$ wird also von einem Element $H_2 \in \mathfrak{H}_2$, welches nicht in $\mathfrak{H}_3$ liegt, und $\mathfrak{H}_3$ erzeugt. Folglich haben alle Elemente von $\mathfrak{H}_2 - \mathfrak{H}_3$ denselben Normalisator, der der Zentralisator $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{H}_2$ ist, da $\mathfrak{H}_3 \leqq \mathfrak{Z}_1$. Deshalb hat $\mathfrak{M}$ den Index p^h unter $\mathfrak{G}$, wobei $h = \beta(H_2) = \beta(\mathfrak{H}_2^{\mathfrak{G}})$.

Mit Hilfe des oben gewählten Elementes H_2 erzeugen wir durch die Abbildung $X \to (X, H_2)$ für $X \in \mathfrak{G}$ einen Homomorphismus von $\mathfrak{G}$, weil $(XY, H_2) = (X, H_2)(Y, H_2)$ (1.2, d). Da nun $\{H_2, \mathfrak{H}_3\} = \mathfrak{H}_2$, ist $(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}_2) = (\mathfrak{G}, H_2) = \mathfrak{H}_3$. Also wird $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{H}_3$ und $\mathfrak{M}$ auf $\mathfrak{E}$ abgebildet.

Somit gilt $\mathfrak{G}/\mathfrak{M} \cong \mathfrak{H}_3$ und $(\mathfrak{H}_3) = p^h$ und wegen $(\mathfrak{H}_2/\mathfrak{H}_3) = p$ $(\mathfrak{H}_2) = p^{h+1}$.

Satz 7. *Ist* $c(\mathfrak{G}) = 3$ *und* $(\mathfrak{H}_3) = p^2$, *so gilt: a)* $\mathfrak{M} = \mathfrak{Z}_2$, *wenn* $\mathfrak{M}$ *der Zentralisator von* $\mathfrak{H}_2$ *ist. b) Es gibt in* $\mathfrak{G}$ *genau* $p+1$ *von* $\mathfrak{G}$ *verschiedene Normalisatoren erster Stufe. c) Jeder von* $\mathfrak{G}$ *verschiedene Normalisator erster Stufe hat die Breite 1. d)* $\mathfrak{G}$ *enthält kein Element der Breite 1. e)* $(\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}_1) = p^3$. *Es gibt in* $\mathfrak{G}$ *genau* $p^2 + p + 1$ *von* $\mathfrak{G}$ *verschiedene Normalisatoren von Elementen aus* $\mathfrak{G}$; *sie sind alle Abelsch.* $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}_1$ *ist also die nicht-Abelsche Gruppe der Ordnung* p^3, *deren Elemente alle die Ordnung* p *haben.*

Beweis. a) Nach Satz 6b ist $(\mathfrak{G}/\mathfrak{M}) = p^2$ und wegen $\Phi \leqq \mathfrak{M}$ (Satz 4) $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}$ nicht zyklisch.

Sei $X \in \mathfrak{G} - \mathfrak{M}$, so ist $\{X, \mathfrak{M}\} = \mathfrak{N}$ von $\mathfrak{G}$ verschieden; denn $\mathfrak{M}$ ist Normalteiler von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}$ nicht zyklisch. Wir wählen dann $Y \in \mathfrak{G} - \mathfrak{N}$ derart, daß $(X, Y) \notin \mathfrak{H}_3$; dies ist immer möglich, weil sonst (1.2, d und g) $(X, \mathfrak{G} - \mathfrak{N}) = (X, \{\mathfrak{G} - \mathfrak{N}\}) = (X, \mathfrak{G}) \leqq \mathfrak{H}_3 \leqq \mathfrak{Z}_1$, d.h. $X \in \mathfrak{Z}_2 \leqq \mathfrak{M}$ [10]) gelten würde. Dann ist $\{X, Y, \mathfrak{M}\} = \mathfrak{G}$ und $\{(X, Y), \mathfrak{H}_3\} = \mathfrak{H}_2$, da $(\mathfrak{H}_2/\mathfrak{H}_3) = p$ (Satz 6b).

Der Durchschnitt $\mathfrak{D} = \mathfrak{N}_0(X) \cap Y^{-1}\mathfrak{N}_0(X)Y$ hat höchstens den Index p^3 unter $\mathfrak{G}$; denn ist $\mathfrak{D}$ von $\mathfrak{N}_0(X)$ verschieden, so ist $\mathfrak{N}_0(X)$ nicht Normalteiler von $\mathfrak{G}$, also der Normalisator $\mathfrak{N}'$ von $\mathfrak{N}_0(X)$ eine maximale Untergruppe von $\mathfrak{G}$ (1.2, b), und $\mathfrak{D}$ hat als Durchschnitt zweier maximaler Untergruppen von $\mathfrak{N}'$ den Index p^2 unter $\mathfrak{N}'$ (1.2, c), mithin den Index p^3 unter $\mathfrak{G}$. $\mathfrak{D}$ zentralisiert X und $Y^{-1}XY = X(X, Y)$, also auch $(X, Y) = K$.

Es ist $K \notin \mathfrak{D}$, da sonst $(K, X) = E$, also $X \in \mathfrak{M}$ wäre. $\{K, \mathfrak{D}\}$ hat also einen Index $\leqq p^2$ unter $\mathfrak{G}$ und zentralisiert K, damit auch $\{K, \mathfrak{H}_3\} = \mathfrak{H}_2$. Folglich ist $\{K, \mathfrak{D}\} = \mathfrak{M}$.

Nun liegt $K \in \mathfrak{H}_2 \leqq \mathfrak{Z}_2$ (1.2, e), so daß $(\{K, \mathfrak{D}\}, X) = (\mathfrak{M}, X) \leqq \mathfrak{Z}_1$, d.h. $\mathfrak{M} \leqq \mathfrak{N}_1(X)$. Sicher ist $\mathfrak{N}_1(X) \neq \mathfrak{G}$, da andernfalls $X \in \mathfrak{Z}_2$ und wegen $\mathfrak{Z}_2 \leqq \mathfrak{M}$ [10]) $X \in \mathfrak{M}$ gelten würde. Daher ist $\mathfrak{N}_1(X) = \{X, \mathfrak{M}\}$.

Da wir X beliebig aus $\mathfrak{G} - \mathfrak{M}$ gewählt haben, gilt für alle $X' \in \mathfrak{G} - \mathfrak{M}$ $(\mathfrak{M}, X') \leqq \mathfrak{Z}_1$, $\{X', \mathfrak{M}\} = \mathfrak{N}_1(X')$. Folglich wird (1.2, d und g) $(\mathfrak{M}, \mathfrak{G} - \mathfrak{M}) = (\mathfrak{M}, \{\mathfrak{G} - \mathfrak{M}\}) = (\mathfrak{M}, \mathfrak{G}) \leqq \mathfrak{Z}_1$, d.h. $\mathfrak{M} \leqq \mathfrak{Z}_2$. In Verbindung mit $\mathfrak{Z}_2 \leqq \mathfrak{M}$ [10]) ergibt das $\mathfrak{M} = \mathfrak{Z}_2$.

b) Der Durchschnitt $\mathfrak{Z}_1 \cap \mathfrak{H}_2$ umfaßt $\mathfrak{H}_3$, und da $\mathfrak{Z}_1 \not\supseteq \mathfrak{H}_2$ und $(\mathfrak{H}_2/\mathfrak{H}_3) = p$ wird $\mathfrak{H}_3 = \mathfrak{Z}_1 \cap \mathfrak{H}_2$. Daher gilt $(\mathfrak{G}, \mathfrak{Z}_2) \leqq \mathfrak{H}_3$, oder $\mathfrak{Z}_2, \mathfrak{H}_3 \leqq \mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G}^*)$, wenn $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}_3 = \mathfrak{G}^*$ gesetzt wird. Da nun nach a) $(\mathfrak{G}, \mathfrak{Z}_2) = p^2$, wird $\mathfrak{Z}_2, \mathfrak{H}_3 = \mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G}^*)$; denn andernfalls wäre $\mathfrak{G}^*/\mathfrak{Z}_1^*(\mathfrak{G}^*)$ zyklisch, also $\mathfrak{G}^*$ Abelsch gegen die Voraussetzung $c(\mathfrak{G}) = 3$. Nun ist für alle $X \in \mathfrak{G} - \mathfrak{Z}_2$ $\mathfrak{N}_0(X\mathfrak{H}_3) = \mathfrak{N}_1(X)/\mathfrak{H}_3$ eine Abelsche Gruppe; denn sie enthält $\mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G}^*)$ als Normalteiler vom Index p. Nach einem früheren Satz (I, Satz 3) gibt es dann in $\mathfrak{G}^*$ [nach Satz 6a ist $\beta(\mathfrak{G}^*) = 1$] genau $p+1$ von $\mathfrak{G}^*$ verschiedene Normalisatoren, die alle Abelsch sind. Jedem

[10]) a. a. O. [2]), S. 121.

dieser Normalisatoren entspricht ein von $\mathfrak{G}$ verschiedener Normalisator erster Stufe in $\mathfrak{G}$, und umgekehrt ist $\mathfrak{N}_1(X')/\mathfrak{H}_3$ für $X' \in \mathfrak{G} - \mathfrak{Z}_2$ wegen $(\mathfrak{N}_1(X'), X') \leqq \mathfrak{Z}_1 \cap \mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H}_3$ der Normalisator $\mathfrak{N}_0(X')\mathfrak{H}_3)$ in $\mathfrak{G}^*$. Es gibt also genau $p+1$ von $\mathfrak{G}$ verschiedene Normalisatoren erster Stufe in $\mathfrak{G}$.

c) Aus a) folgt, daß für $Z_2 \in \mathfrak{Z}_2$ und $X \in \mathfrak{G} - \mathfrak{Z}_2$ $\mathfrak{N}_1(X Z_2) = \mathfrak{N}_1(X) = \{X, \mathfrak{Z}_2\}$ gilt; d.h., alle Elemente von $\mathfrak{N}_1(X)$ haben denselben Normalisator erster Stufe.

Ferner ist $\beta(X) = 2$ für $X \in \mathfrak{G} - \mathfrak{Z}_2$; denn andernfalls wäre $\mathfrak{H}_2 \leqq \mathfrak{N}_0(X)$ (1.2, b und f), also $X \in \mathfrak{M} = \mathfrak{Z}_2$. Und da $\mathfrak{N}_1(X)$ den Index p unter $\mathfrak{G}$ hat, besitzt $\mathfrak{Z}^*(X) \cong \mathfrak{N}_1(X)/\mathfrak{N}_0(X)$ (I, S. 73) die Ordnung p.

Für $\widetilde{Z}_2 \in \widetilde{\mathfrak{Z}}_2 = \mathfrak{Z}_2 - \mathfrak{Z}_2 \cap \mathfrak{N}_0(X)$ [es ist sicher $\mathfrak{N}_0(X) \neq \mathfrak{Z}_2$, da $X \notin \mathfrak{Z}_2$, $\beta(X) = 2$] ist $X\widetilde{Z}_2 \in \mathfrak{G} - \mathfrak{Z}_2$, also auch $(\mathfrak{Z}^*(X\widetilde{Z}_2)) = p$. Und da $(X, X\widetilde{Z}_2) = (X, \widetilde{Z}_2) \neq E$ (1.2, d) in $\mathfrak{Z}^*(X) \cap \mathfrak{Z}^*(X\widetilde{Z}_2)$ enthalten ist, wird $\mathfrak{Z}^*(X) = \mathfrak{Z}^*(X\widetilde{Z}_2)$, oder $\mathfrak{Z}^*(X\widetilde{Z}_2) = (\mathfrak{N}_1(X\widetilde{Z}_2), X\widetilde{Z}_2) = (\mathfrak{N}_1(X), X\widetilde{Z}_2) = \mathfrak{Z}^*(X)$. Folglich gilt (1.2, d) $(\mathfrak{N}_1(X), \widetilde{Z}_2) \leqq \mathfrak{Z}^*(X)$, also auch $(\mathfrak{N}_1(X), \widetilde{\mathfrak{Z}}_2) = (\mathfrak{N}_1(X), \{\widetilde{\mathfrak{Z}}_2\}) = (\mathfrak{N}_1(X), \mathfrak{Z}_2) \leqq \mathfrak{Z}^*(X)$ (1.2, d und g). Beachtet man, daß $\mathfrak{N}_1(X) = \{X, \mathfrak{Z}_2\}$, so ergibt sich $\mathfrak{Z}^*(X) \geqq (\mathfrak{N}_1(X), \mathfrak{N}_1(X))$, und da wegen $\beta(X) = 2$ $\mathfrak{N}_1(X)$ nicht Abelsch sein kann, $(\mathfrak{N}_1(X), \mathfrak{N}_1(X)) = \mathfrak{Z}^*(X)$.

Wie wir gesehen haben, ist $(\mathfrak{Z}^*(X)) = p$ und daher (I, Satz 2) $\beta(\mathfrak{N}_1(X)) = 1$. Dies ist für alle $X \in \mathfrak{G} - \mathfrak{Z}_2$ richtig.

d) Sind nun $X, Y \in \mathfrak{G} - \mathfrak{Z}_2$ so gewählt, daß $\{X, Y, \mathfrak{Z}_2\} = \mathfrak{G}$, so gilt $\mathfrak{Z}^*(X) \cap \mathfrak{Z}^*(Y) = \mathfrak{E}$; denn andernfalls wäre wegen $\mathfrak{H}_2 \leqq \mathfrak{N}_1(X)$ und $\mathfrak{H}_2 \leqq \mathfrak{N}_1(Y)$ (1.2, f) $(\mathfrak{H}_2, X) = \mathfrak{Z}^*(X) = \mathfrak{Z}^*(Y) = (\mathfrak{H}_2, Y)$ und wegen $\mathfrak{M} = \mathfrak{Z}_2$ $\mathfrak{H}_3 = (\mathfrak{H}_2, \{X, Y, \mathfrak{Z}_2\}) = \mathfrak{Z}^*(X)$ von der Ordnung p gegen die Voraussetzung $(\mathfrak{H}_3) = p^2$ (Satz 6b). Nun ist $\mathfrak{Z}_2 = \mathfrak{N}_1(X) \cap \mathfrak{N}_1(Y)$, so daß $\mathfrak{H}_2(\mathfrak{Z}_2) \leqq \mathfrak{H}_2(\mathfrak{N}_1(X)) \cap \mathfrak{H}_2(\mathfrak{N}_1(Y)) = \mathfrak{Z}^*(X) \cap \mathfrak{Z}^*(Y) = \mathfrak{E}$. $\mathfrak{Z}_2$ ist Abelsch.

Gäbe es ein $T \in \mathfrak{G}$ mit $\beta(T) = 1$, so wäre $\mathfrak{H}_2 \leqq \mathfrak{N}_0(T)$ (1.2, f), also $T \in \mathfrak{M} = \mathfrak{Z}_2$. Sei $S \in \mathfrak{G} - \mathfrak{Z}_2$ mit $(S, T) = E$, also $\mathfrak{N}_0(T) = \{S, \mathfrak{Z}_2\} = \mathfrak{N}_1(S)$, ferner $R \in \mathfrak{G} - \mathfrak{N}_0(T)$, dann liegt $(T, RS) = (T, R)$ (1.2, d) in $\mathfrak{Z}^*(RS) \cap \mathfrak{Z}^*(R)$. Dieser Durchschnitt ist aber $\mathfrak{E}$, wie wir unter d) für $RS = X$ und $R = Y$ gezeigt haben. Daher wird $(T, R) = E$, mithin $T \in \mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G})$ gegen die Voraussetzung $\beta(T) = 1$. $\mathfrak{G}$ enthält kein Element der Breite 1.

e) Nun ist gewiß $\mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G}) \leqq \mathfrak{Z}_1(\mathfrak{N}_1(X))$ für $X \in \mathfrak{G} - \mathfrak{Z}_2$. Wäre $\mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G}) < \mathfrak{Z}_1(\mathfrak{N}_1(X))$, so gäbe es ein $Z \in \mathfrak{G}$ mit $(\mathfrak{N}_1(X), Z) = \mathfrak{E}$ und $(\mathfrak{G}, Z) \neq \mathfrak{E}$, also $\beta(Z) = 1$, im Widerspruch zu d).

Da $\mathfrak{Z}_2$ Abelsch ist und $\mathfrak{G}$ kein Element der Breite 1 besitzt, ist $\mathfrak{Z}_2$ Normalisator aller Elemente von $\mathfrak{Z}_2 - \mathfrak{Z}_1$. Dann enthält $\mathfrak{N}_1(X)$ als Gruppe der Breite 1 mit einem Abelschen Normalisator des Index p genau $p+1$ Normalisatoren desselben Index, und die sind alle Abelsch; ferner hat $\mathfrak{Z}_1(\mathfrak{N}_1(X))$ den Index p^2 unter $\mathfrak{N}_1(X)$ (I, Satz 3). Da $\mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G}) = \mathfrak{Z}_1(\mathfrak{N}_1(X))$ und $\mathfrak{N}_1(X)$ den Index p unter $\mathfrak{G}$ besitzt, ist $(\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}_1) = p^3$.

Jeder Normalisator des Index p in $\mathfrak{N}_1(X)$ ist ein Normalisator des Index p^2 in $\mathfrak{G}$, und jeder Normalisator eines Elementes aus $\mathfrak{G}$ kommt in einem Normalisator erster Stufe als Normalisator des Index p vor. Ist $Y \in \mathfrak{G} - \mathfrak{N}_1(X)$,

so ist $\mathfrak{N}_1(X) \cap \mathfrak{N}_1(Y) = \mathfrak{Z}_2$; zwei verschiedene Normalisatoren erster Stufe in $\mathfrak{G}$ haben immer den Normalisator $\mathfrak{Z}_2$ gemeinsam. In Verbindung mit b) ergibt sich daraus, daß es genau p^2+p+1 von $\mathfrak{G}$ verschiedene Normalisatoren von Elementen aus $\mathfrak{G}$ gibt, und diese sind alle Abelsch.

Beispiele. Die folgenden Beispiele zeigen, daß die in den Sätzen 5—7 angegebenen Typen von Gruppen der Breite 2 wirklich vorkommen.

1. $c=2$, $(\mathfrak{H}_2)=p^2$.

$$\mathfrak{G}: \quad S^{p^2}=E,\ R^{p^2}=E,\ (S,R)=Q,\ (Q,S)=E,\ (Q,R)=E.$$

Es ist $\mathfrak{H}_2=\{Q\}=\mathfrak{Z}_1$. Die Elemente von $\Phi=\{S^p, R^p, Q\}$ haben eine Breite ≤ 1.

2. $c=2$, $(\mathfrak{H}_2)=p^3$ [11]).

$$\mathfrak{G}: \quad P_i^p=E,\ Q_i^p=E\ (i=1,2,3),\ (P_2,P_3)=Q_1,\ (P_3,P_1)=Q_2,\ (P_1,P_2)=Q_3,$$
$$(P_i,Q_j)=E,\ (Q_i,Q_j)=E\ (i,j=1,2,3).$$

Es ist $\mathfrak{H}_2=\Phi=\mathfrak{Z}_1$. Es gibt kein Element der Breite 1.

3. $c=3$, $\beta(\mathfrak{H}_2^{\mathfrak{G}})=1$.

$$\mathfrak{G}: \quad P^{p^2}=E,\ Q^{p^2}=E,\ (P,Q)=Q^p.$$

Es ist $\mathfrak{H}_2=\{Q^p\}$, $\mathfrak{Z}_2=\Phi=\{P^p, Q^p\}$, $\mathfrak{Z}_1=\mathfrak{H}_3=\{Q^{p^2}\}$. Die Elemente von $\mathfrak{Z}_2$ haben die Breite ≤ 1.

4. $c=3$, $\beta(\mathfrak{H}_2^{\mathfrak{G}})=2$.

$$\mathfrak{G}: \quad S^p=E,\ R^p=E,\ Q^p=E,\ P_1^p=E,\ P_2^p=E,\ (S,R)=Q,\ (S,Q)=P_1,$$
$$(R,Q)=P_2,\ (P_1,P_2)=E,\ (P_i,S)=E,\ (P_i,R)=E,\ (P_i,Q)=E,$$
$$(i=1,2).$$

Es ist $\mathfrak{H}_2=\{Q, P_1, P_2\}=\mathfrak{Z}_2$, $\mathfrak{H}_3=\mathfrak{Z}_1$, $(\mathfrak{G}:\mathfrak{Z}_1)=p^3$, und $\mathfrak{G}$ enthält kein Element der Breite 1.

---

[11]) BURNSIDE, W.: Theory of group of finite order, 2. Aufl., S. 148. 1911.

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 13. März 1953.)

Wenzl, F.
Math. Zeitschr. Bd. 59, S. 17—39 (1953)

Nullstellendichte reeller Polynome und Tschebyscheffsche Approximation.

Von
F. Wenzl.

I. Einleitung und Problemstellung.

Die Tschebyscheffsche Approximation und die Tschebyscheffschen Polynome haben bereits eine fast hundertjährige Geschichte: 1857 entstand die Abhandlung [1], von der sie ihren Namen haben. Die seither nach Tschebyscheff benannten Polynome spielen dort nur die Rolle eines Beispiels für das Prinzip der Tschebyscheffschen Approximation. Wir können dieses Prinzip folgendermaßen aussprechen:

Gegeben sei ein Bereich $\mathfrak{B}$ der unabhängigen Veränderlichen x und in diesem Bereich eine Funktion $v(x)$ sowie eine Klasse K von zulässigen Näherungsfunktionen, dargestellt etwa mittels der Parameter a_ν durch $f(x; a_1; \ldots a_n)$. Nun sollen aus K durch geeignete Wahl der a_ν solche Funktionen von x ausgesucht werden, für die

$$\text{(1.1)} \qquad \max_{\mathfrak{B}} |f - v| \quad \text{möglichst klein}$$

wird. Das Entscheidende ist also der durch (1.1) ausgesprochene Gesichtspunkt für die Güte der Näherung.

Im folgenden wählen wir als Approximationsbereich $\mathfrak{B}$ immer das Intervall $I(-1 \leq x \leq 1)$ der reellen Veränderlichen x. Ferner sei $v(x) \equiv 0$. Lösungen, d. h. solche Funktionen der Klasse K, die der Bedingung (1.1) genügen, werden wir mit $F(x)$ bezeichnen.

Es sei nun n eine vorgegebene natürliche Zahl. Ist dann

$$\text{(1.2)} \qquad f = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n,$$

so erhalten wir, wie seit 1857 bekannt, als Lösung der zugehörigen Aufgabe (1.1) die Tschebyscheffschen Polynome, darstellbar durch

$$\text{(1.2a)} \qquad F_n(x) = \frac{\cos n\varphi}{2^{n-1}}, \qquad \text{wobei} \quad x = \cos\varphi \quad (0 \leq \varphi \leq \pi).$$

Ersetzen wir (1.2) durch

$$\text{(1.3)} \qquad f = \sqrt{1 - x^2} \cdot (x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n),$$

so erhalten wir, wie ebenfalls bekannt, als Lösung der Aufgabe (1.1) die mit $\sqrt{1 - x^2}$ multiplizierten Tschebyscheffschen Polynome zweiter Art, darstellbar durch

$$\text{(1.3a)} \qquad F_n(x) = \frac{\sin(n+1)\varphi}{2^n}, \quad \text{wobei} \quad x = \cos\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

Ein weiteres Beispiel ist

$$f = \sqrt{1-x}\,(x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n) \tag{1.4}$$

mit der Lösung

$$F_n(x) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\varphi}{2^{n-\frac{1}{2}}} \quad \text{mit} \quad x = \cos\varphi, \qquad 0 \leqq \varphi \leqq \pi. \tag{1.4a}$$

Die zugehörigen Beweise seien hier übergangen. Sie lassen sich mit Hilfe eines bekannten Satzes führen, den wir für unsere Zwecke hier (ebenfalls ohne Beweis) wiedergeben als

Satz 1: *I bedeute das Intervall* $(-1 \leqq x \leqq 1)$; *$g(x)$ sei eine in I stetige vorgegebene Funktion, die im Innern von I nirgends verschwindet. n sei eine vorgegebene natürliche Zahl. Für die (eindeutige) Lösung $F(x)$ der Aufgabe*

$$\begin{cases} \operatorname{Max}_{-1 \leqq x \leqq 1} |f| & \textit{möglichst klein mit} \\ f = g(x) \cdot (x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n) \end{cases} \tag{1.5}$$

ist dann notwendig und hinreichend, daß $F(x)$ an $n+1$ der Größe nach geordneten Stellen des Intervalls I mit abwechselndem Vorzeichen den Betrag $L = \operatorname{Max}_{-1 \leqq x \leqq 1} |F|$ annimmt (und natürlich, daß $F(x)$ zur Klasse der Funktionen f gehört).

Abgesehen vom Beweis für die *Notwendigkeit* der genannten Bedingungen läßt sich sowohl die Begründung von Satz 1 wie auch seine Anwendung auf die vorher genannten Einzelfälle beispielsweise aus [2], S. 55 unmittelbar entnehmen bzw. übertragen. Zur Notwendigkeit der Bedingungen vgl. etwa [1] oder [3].

Wir betrachten nun die *Verteilung der Nullstellen* bei den Funktionen (1.2a), (1.3a) und (1.4a) im Inneren des Intervalls I: Man kommt von einer Nullstelle zur nächsten, wenn man φ um $\Delta\varphi$ wachsen oder abnehmen läßt, wobei

$$\begin{cases} \Delta\varphi = \dfrac{\pi}{n} & \text{im Fall (1.2a),} \\ \Delta\varphi = \dfrac{\pi}{n+1} & \text{im Fall (1.3a) und} \\ \Delta\varphi = \dfrac{\pi}{n+\frac{1}{2}} & \text{im Fall (1.4a).} \end{cases} \tag{1.6}$$

Aus $x = \cos\varphi$ folgt nun

$$\Delta x = -\sin\tilde{\varphi} \cdot \Delta\varphi \tag{1.7}$$

mit einem geeigneten Mittelwert $\tilde{\varphi}$ aus dem betrachteten Teilintervall.

Wir definieren jetzt zu jedem $F_n(x)$ [1]) zwischen seiner kleinsten und größten Nullstelle eine „Nullstellendichte" $\varrho_n(x)$ durch den reziproken Wert des Abstands $|\Delta x|$ der beiden zu x benachbarten Nullstellen von F_n bzw., falls x selbst eine Nullstelle ist, als reziproke Entfernung von der nächstgrößeren

[1]) Dabei ist natürlich zu beachten, daß F_n in (1.2a), (1.3a) und (1.4a) immer wieder anders definiert ist.

Nullstelle. Nach (1.7) folgt dann

$$\varrho_n(x) = \frac{1}{\sin\tilde{\varphi} \cdot \Delta\varphi}$$

mit $\Delta\varphi$ aus (1.6). Daraus ergibt sich unter Berücksichtigung von $x = \cos\varphi$, also von $\sqrt{1-\tilde{x}^2} = |\sin\tilde{\varphi}|$, die Gleichung

$$\text{(1.8)} \qquad \frac{\varrho_n(x)}{n} = \frac{1}{\sqrt{1-\tilde{x}^2}} \cdot \frac{1+\delta}{\pi} \quad \text{mit} \quad \delta = \begin{cases} 0 \text{ im Fall (1.2a)} \\ \frac{1}{n} \text{ im Fall (1.3a)} \\ \frac{1}{2n} \text{ im Fall (1.4a)} \end{cases}.$$

Man hat also in jedem der drei behandelten Fälle

$$\text{(1.8a)} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\varrho_n(x)}{n} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\cdot\pi} \quad \text{für} \quad -1 < x < 1.$$

Das Ergebnis läßt sich in Worten folgendermaßen aussprechen: Die „relative Nullstellendichte" $\varrho_n(x)/n$ hat für die Lösungen $F_n(x)$ der Aufgaben (1.2), (1.3), (1.4) *dieselbe Grenzfunktion*, wenn man n über alle Schranken wachsen läßt; anschaulich gesprochen: *Die Nullstellenverteilung unserer Lösungen ist bei großem n „fast dieselbe" im Fall* (1.2), *im Fall* (1.3) *und im Fall* (1.4).

Es liegt nun die Vermutung nahe, daß Entsprechendes unter wesentlich allgemeineren Voraussetzungen gilt, d.h. daß es dabei auf den Faktor $g(x)$ aus (1.5) mit geringfügigen Einschränkungen überhaupt nicht ankommt. Im Fall

$$\text{(1.9)} \qquad g(x) = \frac{1}{x^l + c_1 x^{l-1} \dots + c_{l-1} x + c_l}$$

ist ($n > l$ vorausgesetzt) aus den zugehörigen Lösungen F_n (vgl. [1], S. 313ff. oder auch [4], S. 13) eine positive Entscheidung unmittelbar zu entnehmen. Entsprechendes gilt für $g(x) = (x-c_1) \dots (x-c_l)$ mit gegebenen c_λ [alle c_λ außerhalb $(-1;1)$], vgl. [4], S. 16ff. Von hier aus könnte man ähnlich wie in [4], S. 24 versuchen, mit Hilfe des Weierstrassschen Approximationssatzes auch zu einer Aussage für andere Funktionen $g(x)$ zu kommen. Wir wollen jedoch hier einen anderen Weg beschreiten, der zugleich auch einen Einblick erlaubt in die Verhältnisse bei weiteren Approximationsaufgaben, die nicht durch (1.5) darstellbar sind. Die Abschätzungen des folgenden zweiten Teils, die zugleich einen Hinweis für die praktische Behandlung numerischer Einzelaufgaben liefern, sind auch unabhängig von der unter I. gegebenen Einführung verfolgbar.

II. Nullstellendichte und Integralabschätzung einer Klasse reeller Polynome.

Gegeben sei ein Polynom n-ten Grades $P(x)$, von dessen Nullstellen $\xi_1; \dots \xi_n$ vorausgesetzt sei

$$\text{(2.1)} \qquad -1 < \xi_1 < \dots < \xi_n < 1.$$

Der Koeffizient von x^n in $P(x)$ sei 1. Dann hat man, falls x keine Nullstelle von P bedeutet,

$$|P(x)| = \prod_{\nu=1}^{n} |x - \xi_\nu| = e^{\sum_{\nu=1}^{n} \ln|x-\xi_\nu|}. \tag{2.2}$$

In Übereinstimmung mit den Betrachtungen nach (1.7) definieren wir nun die „Nullstellendichte" ϱ von $P(x)$ durch

$$\varrho(\xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{\xi_{\nu+1} - \xi_\nu} & \text{für} \quad \xi_\nu \leqq \xi < \xi_{\nu+1} \\ 0 & \text{für} \quad \xi < \xi_1 \quad \text{und für} \quad \xi > \xi_n. \end{cases} \tag{2.2a}$$

Sie ist eine stückweise stetige Funktion und ermöglicht nach (2.2) die Darstellung des Betrags von P durch

$$|P(x)| = e^{\sum_{\nu=1}^{n} \ln|x-\xi_\nu| \cdot \varrho(\xi_\nu)\cdot(\xi_{\nu+1}-\xi_\nu)}\,^{2}). \tag{2.3}$$

Der Exponent S auf der rechten Seite legt den Vergleich nahe mit

$$\begin{cases} j = \int_{-1}^{+1} \ln|x-\xi|\,\varrho(\xi)\,d\xi = \sum_{\nu=1}^{n-1} \int_{\xi_\nu}^{\xi_{\nu+1}} \ln|x-\xi|\,\varrho(\xi)\,d\xi \\ \underset{(2.2a)}{=} \sum_{\nu=1}^{n-1} \varrho(\xi_\nu) \cdot \int_{\xi_\nu}^{\xi_{\nu+1}} \ln|x-\xi|\,d\xi. \end{cases} \tag{2.4}$$

Es sei nun

$$\xi_m < x < \xi_{m+1}. \tag{2.4a}$$

Wir betrachten zunächst den Fall $\nu < m$, also nach (2.1) und (2.4a)

$$\xi_{\nu+1} < x. \tag{A}$$

Dann ist, wie sich durch Ausführung der Quadratur und einfache Umformung ergibt,

$$\int_{\xi_\nu}^{\xi_{\nu+1}} \ln|x-\xi|\,d\xi = (\xi_{\nu+1} - \xi_\nu)\ln(x-\xi_\nu) + R_\nu \tag{2.5}$$

mit

$$R_\nu = \xi_\nu - \xi_{\nu+1} + (\xi_{\nu+1} - x)\cdot \ln\frac{x-\xi_{\nu+1}}{x-\xi_\nu}. \tag{2.5a}$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\xi_{\nu+1} - \xi_\nu = \delta; \qquad x - \xi_{\nu+1} = u \tag{2.5b}$$

(der Index ν, von dem natürlich auch δ und u abhängen, ist der Bequemlichkeit halber rechts jeweils weggelassen), so folgt nach (2.2a)

$$\varrho(\xi_\nu)\cdot R_\nu = -1 - \frac{u}{\delta}\cdot\ln\frac{u}{u+\delta}.$$

---

[2]) $\varrho(\xi_n)\cdot(\xi_{n+1}-\xi_n)$ ist zunächst nicht definiert; es bedeute wie die anderen Faktoren $\varrho(\xi_\nu)\cdot(\xi_{\nu+1}-\xi_\nu)$ der Einheitlichkeit halber 1 [für das Folgende ohne besondere Bedeutung, da aus (2.3) keine weiteren Schlüsse gezogen werden].

Wir vergleichen dies mit

$$\int_{\xi_\nu}^{\xi_{\nu+1}} \frac{d\xi}{x-\xi} = -\ln\frac{x-\xi_{\nu+1}}{x-\xi_\nu} = -\ln\frac{u}{u+\delta}$$

und erhalten

(2.5 c) $$\varrho(\xi_\nu)\cdot R_\nu = q\cdot\int_{\xi_\nu}^{\xi_{\nu+1}} \frac{d\xi}{x-\xi}$$

mit

$$q = \frac{1}{\ln\frac{u}{u+\delta}}\left(1+\frac{u}{\delta}\ln\frac{u}{u+\delta}\right) = \frac{u}{\delta} - \frac{1}{\ln\frac{u+\delta}{u}}.$$

Es ist also

$$q = \frac{1}{z} - \frac{1}{\ln(1+z)} \qquad \text{mit} \qquad z = \frac{\delta}{u}.$$

Daraus folgt

(α) $$q \to 0 \quad \text{für} \quad z \to +\infty,$$

(β) $$q \to -\tfrac{1}{2} \quad \text{für} \quad z \to +0$$

wegen

$$\frac{1}{\ln(1+z)} = \frac{1}{z-\frac{z^2}{2}+\cdots} = \frac{1}{z}\left(1+\frac{z}{2}+\cdots\right)$$

und

(γ) $$\frac{dq}{dz} = -\frac{1}{z^2} + \frac{1}{1+z}\cdot\frac{1}{\ln^2(1+z)} > 0 \qquad \text{für} \quad z>0,$$

wie folgendermaßen zu erkennen ist: $\frac{dq}{dz}=0$ für $z>0$ wäre gleichbedeutend mit

(δ) $$\ln(1+z) = \frac{z}{\sqrt{1+z}},$$

was für $z=0$ erfüllt ist. Die Ableitung der linken Seite von (δ) ist $\frac{1}{1+z}$, die Ableitung der rechten Seite dagegen $\frac{1}{1+z}\left[\sqrt{1+z}-\frac{z}{2\sqrt{1+z}}\right]$. Die eckige Klammer ist dabei

$$\frac{1+\frac{z}{2}}{\sqrt{1+z}} = \sqrt{\frac{1+z+\frac{z^2}{4}}{1+z}} > 1.$$

Die Ableitung der rechten Seite von (δ) ist also für $z>0$ immer größer als diejenige der linken Seite und da (δ) für $z=0$ erfüllt ist, gibt es kein $z>0$, für das (δ) ebenfalls erfüllt wäre.

dq/dz kann also für positives z sein Vorzeichen nicht wechseln. Setzt man speziell $z=1$, so folgt $\frac{dq}{dz} = -1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\ln^2 2} > 0$, womit ($\gamma$) bewiesen ist.

(α), (β) und (γ) ergeben für $z=\frac{\delta}{u}>0$ zusammenfassend

(2.5 d) $$-\tfrac{1}{2} < q < 0.$$

Nach (2.5c), (2.5b), (2.4a) und (A) ist daher

$$(2.6)\quad 0 < -\sum_{\nu=1}^{m-1} \varrho(\xi_\nu)\, R_\nu < \frac{1}{2}\int_{\xi_1}^{\xi_m} \frac{d\xi}{x-\xi} = \frac{1}{2}\ln\frac{x-\xi_1}{x-\xi_m} < \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-\xi_m}.$$

Daraus, aus (2.5) und (2.2a) folgt

$$(2.7)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{\nu=1}^{m-1} \varrho(\xi_\nu)\cdot\int_{\xi_\nu}^{\xi_{\nu+1}} \ln|x-\xi|\, d\xi = \sum_{\nu=1}^{m-1} \ln(x-\xi_\nu) - \delta_1 \ln\frac{x+1}{x-\xi_m} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{mit}\quad 0<\delta_1<\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Wir gehen nun über zum Fall $\nu > m$, also nach (2.1) und (2.4a) zu

$$(B)\qquad x < \xi_\nu.$$

Statt (2.5) folgt dann (mit $\nu < n$)

$$(2.8)\qquad \int_{\xi_\nu}^{\xi_{\nu+1}} \ln|x-\xi|\, d\xi = (\xi_{\nu+1}-\xi_\nu)\cdot\ln(\xi_{\nu+1}-x) + R_\nu$$

mit

$$(2.8a)\qquad R_\nu = \xi_\nu - \xi_{\nu+1} + (x-\xi_\nu)\cdot\ln\frac{\xi_\nu - x}{\xi_{\nu+1}-x},$$

d.h., wenn man statt (2.5b) jetzt

$$(2.8b)\qquad \xi_{\nu+1}-\xi_\nu = \delta; \qquad \xi_\nu - x = u$$

setzt, wieder nach (2.2a)

$$\varrho(\xi_\nu)\, R_\nu = -1 - \frac{u}{\delta}\cdot\ln\frac{u}{u+\delta}.$$

Der Vergleich mit

$$\int_{\xi_\nu}^{\xi_{\nu+1}} \frac{d\xi}{\xi-x} = \ln\frac{\xi_{\nu+1}-x}{\xi_\nu - x} = -\ln\frac{u}{u+\delta}$$

ergibt daher

$$(2.8c)\qquad \varrho(\xi_\nu)\cdot R_\nu = q\cdot\int_{\xi_\nu}^{\xi_{\nu+1}} \frac{d\xi}{\xi-x},$$

wobei wie in (2.5d) wieder

$$(2.8d)\qquad -\frac{1}{2} < q < 0 \quad \text{für} \quad z = \frac{\delta}{u} > 0,$$

da q dieselbe Funktion von u und δ darstellt wie in (2.5c); daß u hier eine andere Bedeutung als in (2.5b) hat, macht dabei natürlich nichts aus.

Nach (2.8c), (2.8b), (2.4a) und (B) ist daher

$$(2.9)\quad 0 < -\sum_{\nu=m+1}^{n-1} \varrho(\xi_\nu)\, R_\nu < \frac{1}{2}\int_{\xi_{m+1}}^{\xi_n} \frac{d\xi}{\xi-x} = \frac{1}{2}\ln\frac{\xi_n - x}{\xi_{m+1}-x} < \frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{\xi_{m+1}-x}.$$

Daraus, aus (2.8) und (2.2a) folgt

$$(2.10)\quad \left\{ \sum_{\nu=m+1}^{n-1} \varrho(\xi_\nu) \int_{\xi_\nu}^{\xi_{\nu+1}} \ln|x-\xi|\,d\xi = \sum_{\nu=m+1}^{n-1} \ln(\xi_{\nu+1}-x) - \delta_2 \ln \frac{1-x}{\xi_{m+1}-x} \right.$$
$$\text{mit}\quad 0<\delta_2<\tfrac{1}{2}.$$

Es bleibt nun noch der Fall $\nu=m$, also nach (2.4a)

$$(C)\qquad \xi_\nu < x < \xi_{\nu+1}.$$

Wegen (2.4a) ist

$$\int_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} \ln|x-\xi|\,d\xi = \int_{\xi_m}^{x} \ln(x-\xi)\,d\xi + \int_{x}^{\xi_{m+1}} \ln(\xi-x)\,d\xi$$
$$= (x-\xi_m)\ln(x-\xi_m) + (\xi_m - x) + (\xi_{m+1}-x)\ln(\xi_{m+1}-x) + (x-\xi_{m+1})$$

oder

$$(2.11)\quad \left\{ \begin{aligned} &\varrho(\xi_m)\int_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} \ln|x-\xi|\,d\xi \\ &\qquad = \frac{x-\xi_m}{\xi_{m+1}-\xi_m}\ln(x-\xi_m) + \frac{\xi_{m+1}-x}{\xi_{m+1}-\xi_m}\ln(\xi_{m+1}-x) - 1 \\ &\qquad = (1-\delta_3)\ln(x-\xi_m) + (1-\delta_4)\ln(\xi_{m+1}-x) - 1 \end{aligned} \right.$$

mit

$$(2.11a)\qquad (0<)\,\delta_3 = \frac{\xi_{m+1}-x}{\xi_{m+1}-\xi_m} < 1; \qquad (0<)\,\delta_4 = \frac{x-\xi_m}{\xi_{m+1}-\xi_m} = 1-\delta_3 < 1.$$

Wir können nun die bisher gewonnenen Ergebnisse durch Addition von (2.7), (2.10) und (2.11) zusammenfassen und bekommen als Abschätzung des Integrals (2.4) das Ergebnis

$$j = \sum_{\nu=1}^{n} \ln|x-\xi_\nu| - \delta_1\ln(x+1) - \delta_2\ln(1-x) -$$
$$- \vartheta_1\ln(x-\xi_m) - \vartheta_2\ln(\xi_{m+1}-x) - 1$$

mit

$$(2.11b)\qquad \vartheta_1 = \delta_3 - \delta_1; \qquad \vartheta_2 = \delta_4 - \delta_2,$$

also nach (2.2) und (2.4) schließlich

$$(2.12)\quad \left\{ \begin{aligned} \ln|P(x)| = \int_{-1}^{+1} \ln|x-\xi|\,\varrho(\xi)\,d\xi + \delta_1\ln(x+1) + \delta_2\ln(1-x) + \\ + \vartheta_1\ln(x-\xi_m) + \vartheta_2\ln(\xi_{m+1}-x) + 1. \end{aligned} \right.$$

Dabei ist nach (2.7) und (2.10)

$$(2.12a)\qquad 0 < \delta_{1;2} < \tfrac{1}{2}$$

und daher nach (2.11a) und (2.11b)

$$(2.12b)\qquad -\tfrac{1}{2} < \vartheta_{1;2} < 1.$$

Diese Abschätzung läßt sich sofort verschärfen, wenn man zunächst annimmt, x liege näher an ξ_m als an ξ_{m+1} [und natürlich weiterhin im Intervall

$\xi_m; \xi_{m+1}$, wie es nach (2.4a) sein muß]. Nach (2.11a) ist dann

$$\tfrac{1}{2} < \delta_3 < 1; \qquad 0 < \delta_4 < \tfrac{1}{2}.$$

Nach (2.11b) und (2.12a) folgt daraus

$$0 < \vartheta_1 < 1; \quad -\tfrac{1}{2} < \vartheta_2 < \tfrac{1}{2}. \tag{2.12c}$$

Dies gilt auch noch für $x = \frac{1}{2}(\xi_{m+1} + \xi_m)$. Es ergibt sich damit als Polynomabschätzung folgender

Satz 2: *Gegeben sei das Polynom* $P(x) = \prod_{\nu=1}^{n}(x - \xi_\nu)$ *mit* $-1 < \xi_1 < \cdots < \xi_n < 1$.

Die Stelle x *teile das Intervall* $(\xi_m; \xi_{m+1})$ *von innen im Verhältnis* $(0<)\ \delta_4 : \delta_3 \leqq 1$, *wobei* $\delta_4 + \delta_3 = 1$ *vorausgesetzt sei*[3]). *Unter Verwendung der durch* (2.2a) *definierten Nullstellendichte* ϱ *des Polynoms* $P(x)$ *gilt dann*

$$|P(x)| = e^{\int_{-1}^{+1} \ln|x-\xi|\,\varrho(\xi)\,d\xi} \cdot (x+1)^{\delta_1}(1-x)^{\delta_2}(x-\xi_m)^{\vartheta_1}(\xi_{m+1}-x)^{\vartheta_2} \cdot e, \tag{2.13}$$

wobei

$$0 < \delta_{1;2} < \tfrac{1}{2}; \qquad 0 < \vartheta_1 = \delta_3 - \delta_1 < 1; \qquad -\tfrac{1}{2} < \vartheta_2 = \delta_4 - \delta_2 < \tfrac{1}{2}. \tag{2.13a}$$

Für den Fall $\delta_4 : \delta_3 > 1$, d.h. nach (2.11a) für $\frac{1}{2}(\xi_m + \xi_{m+1}) < x < \xi_{m+1}$, wären natürlich bloß die in (2.13a) stehenden Abschätzungen für ϑ_1 und ϑ_2 sinngemäß zu vertauschen.

Für die in (2.2a) eingeführte Nullstellendichte $\varrho(\xi)$ gilt

$$\int_{-1}^{+1} \varrho(\xi)\,d\xi = \int_{\xi_1}^{\xi_n} \varrho(\xi)\,d\xi = \sum_{\nu=1}^{n-1} \int_{\xi_\nu}^{\xi_{\nu+1}} \varrho(\xi)\,d\xi = n - 1.$$

Um auch für große n ein wenigstens im Mittel beschränktes Maß für die Nullstellendichte zu haben, führen wir nun entsprechend (1.8) die „relative Nullstellendichte" $\varrho^*(\xi)$ durch

$$\varrho(\xi) = n \cdot \varrho^*(\xi); \qquad \varrho^*(\xi) = \frac{1}{n} \cdot \varrho(\xi) \tag{2.14}$$

ein. Aus Satz 2 folgt dann

$$\ln|P(x)| = n \cdot \left[\int_{-1}^{+1} \ln|x-\xi|\,\varrho^*(\xi)\,d\xi + \vartheta^*\right] \tag{2.15}$$

mit

$$\begin{cases} \vartheta^* = \dfrac{\delta_1}{n}\ln(x+1) + \dfrac{\delta_2}{n}\ln(1-x) \\ \quad + \dfrac{\vartheta_1}{n}\ln(x-\xi_m) + \dfrac{\vartheta_2}{n}\ln(\xi_{m+1}-x) + \dfrac{1}{n}. \end{cases} \tag{2.15a}$$

Der wesentliche Inhalt von (2.15a) läßt sich einfacher schreiben bei Beschränkung auf solche x, die nicht zu nahe an ± 1 und nicht zu nahe an einer Null-

[3]) Vgl. Fig. 1:

Fig. 1.

stelle des Polynoms P liegen, und zwar in folgendem Sinn: $\varepsilon_0 (< 1)$ und $q_0 (> 2)$ seien zwei (beliebig klein bzw. groß) vorgegebene positive Zahlen und x erfülle die Ungleichungen

$$(2.16) \qquad |x| \leq 1 - \varepsilon_0; \qquad \xi_m + \frac{\xi_{m+1} - \xi_m}{q_0} \leq x \leq \frac{1}{2}(\xi_{m+1} + \xi_m).$$

Unter Berücksichtigung von (2.2a) und (2.14), d.h. von $\xi_{m+1} - \xi_m = \frac{1}{n \cdot \varrho^*(x)}$, folgt dann aus (2.15a) schließlich

$$(2.16a) \qquad \vartheta^* = \alpha_1 \ln \varepsilon_0 + \alpha_2 \ln q_0 + \alpha_3 \ln \varrho^*(x) + \alpha_4,$$

wobei (unter Benutzung von Satz 2)

$$(2.16b) \qquad |\alpha_k| < \frac{1}{n} \quad \text{für} \quad k = 1; 2; 3, \qquad |\alpha_4| < \operatorname{Max}\left(\frac{\ln n}{n}; \frac{2}{n}\right).$$

Wir denken uns nun zu jeder natürlichen Zahl n ein Polynom $P_n(x)$ vom Grad n, das die Voraussetzungen von Satz 2 erfüllt, und betrachten die *Folge dieser Polynome*. Wir setzen ferner voraus, daß im vorgegebenen Intervall

$$(2.17) \qquad I^*(|x| \leq 1 - \varepsilon_0) \quad \text{mit} \quad 0 < \varepsilon_0 < 1$$

die relativen Nullstellendichten ϱ_n^* der Polynome P_n nach oben und unten gemeinsame positive Schranken besitzen: Mit festen positiven Zahlen γ und G sei also

$$(2.17a) \qquad (0 <) \gamma \leq \varrho_n^* \leq G$$

zugleich für alle n und für alle x aus I^*.

Hält man dann nicht nur ε_0, sondern auch $q_0 (> 2)$ für alle n *fest*, so vereinfacht sich (2.16a) und (2.16b) zu

$$(2.17b) \qquad \vartheta^* = O\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

Unter Berücksichtigung von (2.15) ergibt sich also der folgende

Satz 2a: *Zu jedem $n = 2; 3; 4 \ldots$ sei ein Polynom $P_n = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots$ mit lauter einfachen, zwischen -1 und $+1$ gelegenen Nullstellen gegeben. Die relative Nullstellendichte ϱ_n^* der Polynome P_n sei durch* (2.17a) *im Intervall I^* gleichmäßig beschränkt*[4]. *Ein zu I^* gehöriger Punkt x_n habe von den beiden ihm benachbarten Nullstellen ξ_m und ξ_{m+1} des Polynoms P_n mindestens die Entfernung $\frac{1}{q_0}(\xi_{m+1} - \xi_m)$ mit für alle n gemeinsamem $q_0 (> 2)$. Dann gilt*

$$(2.18) \qquad \ln |P_n(x_n)| = n \cdot \left[\int_{-1}^{+1} \ln |x_n - \xi| \, \varrho_n^*(\xi) \, d\xi + \vartheta^* \right] \quad \text{mit} \quad \vartheta^* = O\left(\frac{\ln n}{n}\right),$$

d.h. mit

$$(2.18a) \qquad \vartheta^* = \mu \cdot \frac{\ln n}{n},$$

wobei $|\mu| < M$ mit einer nur von $I^*; q_0; \gamma; G$ (aber nicht von n) abhängigen Schranke M.

[4]) I^* bedeute auch im folgenden immer das in (2.17) definierte Intervall.

Die Polynomabschätzung (2.18) gilt also grob gesagt, da q_0 beliebig groß vorgegeben werden konnte, jeweils für „fast alle" x_n in dem Sinn, daß bei Betrachtung des Polynoms P_n immer nur solche x des Intervalls I^* ausgeschlossen sind, die besonders nahe an einer Nullstelle dieses Polynoms liegen.

Wir betrachten nun im besonderen solche x, an denen ein Polynom $P(x)$ das Maximum seines Betrags zwischen den benachbarten Nullstellen annimmt. Dazu brauchen wir eine genauere Abschätzung der in (2.15a) stehenden Teilsumme

$$\sigma = \frac{\vartheta_1}{n} \ln (x - \xi_m) + \frac{\vartheta_2}{n} \ln (\xi_{m+1} - x). \tag{2.19}$$

Für $x = \frac{1}{2}(\xi_{m+1} + \xi_m)$ ist nach (2.2a) $\sigma = \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{n} \cdot \ln \frac{1}{2\varrho(x)}$, also nach Satz 2

$$\sigma = \frac{1 - (\delta_1 + \delta_2)}{n} \ln \frac{1}{2\varrho(x)} > -\frac{1}{n} \ln [2\varrho(x)]. \tag{2.19a}$$

Andererseits ist für *alle* x im Intervall $\xi_m < x < \frac{1}{2}(\xi_{m+1} + \xi_m)$ nach Satz 2 immer $\frac{\vartheta_1}{n} \ln (x - \xi_m) < 0$ und, falls $\varrho > 1$ [5]), $\frac{\vartheta_2}{n} \ln (\xi_{m+1} - x) < \frac{1}{2n} \ln [2\varrho(x)]$, also

$$\sigma < \frac{1}{2n} \ln [2\varrho(x)]. \tag{2.19b}$$

Dasselbe gilt natürlich auch für $\frac{1}{2}(\xi_{m+1} + \xi_m) < x < \xi_{m+1}$; aus (2.19a) und (2.19b) folgt daher [nach (2.2a) ist $\varrho(x) = \text{const}$ für $\xi_m \leqq x < \xi_{m+1}$]

$$-\frac{1}{n} \ln [2\varrho(x)] < \operatorname*{Max}_{\xi_m < x < \xi_{m+1}} \sigma < \frac{1}{2n} \ln [2\varrho(x)], \qquad \xi_m < x < \xi_{m+1}. \tag{2.19c}$$

Betrachtet man nun wieder Polynom*folgen*, deren relative Nullstellendichte im festgehaltenen Intervall I^* durch (2.17a) gleichmäßig beschränkt ist, so folgt aus (2.19c) schließlich wieder

$$\operatorname*{Max}_{\xi_m < x < \xi_{m+1}} \sigma = O\left(\frac{\ln n}{n}\right) \tag{2.19d}$$

bei Beschränkung auf das Intervall I^*. (Die $\xi_m; \xi_{m+1}$ hängen dabei nun natürlich wie in Satz 2a wieder von dem jeweiligen Polynom P_n ab; wir verzichten aber hier und im folgenden auf n als zweiten Index.)

Damit ist zunächst die in (2.19) herausgegriffene Teilsumme σ der rechten Seite von (2.15a) abgeschätzt. Für die Teilsumme τ der übrigen drei Summanden auf der rechten Seite von (2.15a) gilt aber im festen Intervall I^*, wie unmittelbar zu sehen ist, sogar $\tau = O\left(\frac{1}{n}\right)$. Aus (2.19d) folgt daher bei Beschränkung auf das Intervall I^* auch

$$\operatorname*{Max}_{\xi_m < x < \xi_{m+1}} \vartheta^* = O\left(\frac{\ln n}{n}\right). \tag{2.20}$$

[5]) (2.19d) ist von dieser Einschränkung unabhängig.

Nun ist nach (2.15) im Intervall $\xi_m < x < \xi_{m+1}$

$$\text{(2.20a)} \qquad \operatorname{Max} \frac{\ln |P_n|}{n} = \int_{-1}^{+1} \ln |x - \xi| \cdot \varrho_n^*(\xi)\, d\xi + \operatorname{Max} \vartheta^*,$$

wobei x zwar nicht notwendig die Stelle X, an der das linksstehende Maximum angenommen werde, sein muß, aber jedenfalls auch eine Stelle im Intervall $(\xi_m; \xi_{m+1})$ [6]), für die nach (2.17a) sicher $|X - x| < \frac{1}{\gamma \cdot n}$ mit festem γ für alle n. Daher ist, wieder nach (2.17a), wegen $\varrho_n^* \leqq G$

$$\text{(2.20b)} \qquad \int_{-1}^{+1} \ln \left| \frac{X - \xi}{x - \xi} \right| \varrho_n^*(\xi)\, d\xi = O\left(\frac{\ln n}{n}\right),$$

wie sich z.B. durch Aufspaltung in $\int_{-1}^{x} + \int_{x}^{X} + \int_{X}^{1}$ ($X > x$ vorausgesetzt) nachprüfen läßt [7]).

---

[6]) Allgemein folgt nämlich aus $S(x) = f(x) + g(x)$, die Existenz der betrachteten Extrema vorausgesetzt, wenn

$f(x)$ sein Maximum im Intervall I an der Stelle x_0 und

$g(x)$ sein Maximum im Intervall I an der Stelle x_1 annimmt,

$$\text{einerseits } \operatorname*{Max}_I S \geqq S(x_1) = f(x_1) + \operatorname*{Max}_I g,$$

$$\text{andererseits } \operatorname*{Max}_I S \leqq \left(\operatorname*{Max}_I f\right) + \left(\operatorname*{Max}_I g\right) = f(x_0) + \operatorname*{Max}_I g,$$

$$\text{also bei stetigem } f \text{ sicher } \operatorname*{Max}_I S = f(x) + \operatorname*{Max}_I g$$

mit geeignetem x aus I (nach dem „Zwischenwertsatz" für stetige Funktionen).

Die Anwendung auf (2.15) und das Intervall $(\xi_m; \xi_{m+1})$ ist möglich, weil im Inneren dieses Intervalls die linke Seite und der erste Summand auf der rechten Seite, also auch der zweite Summand, stetig sind; die Randpunkte stören hier nicht, da dort die linke Seite (und der zweite Summand der rechten Seite) *negativ* ∞ wird.

[7]) Für $X > x\,(> -1 + \varepsilon_0)$ ist $0 < \int_{-1}^{x} \ln\left(\frac{X - \xi}{x - \xi}\right) \varrho_n^*(\xi)\, d\xi \leqq G \cdot \int_{-1}^{x} \ln\left(\frac{X - \xi}{x - \xi}\right) d\xi$

$= G \cdot \{(X+1) \cdot [\ln(X+1) - 1] - (X - x) \cdot [\ln(X - x) - 1] - (x+1) \cdot [\ln(x+1) - 1]\}$

$= O\left(\frac{\ln n}{n}\right)$ wegen $|X - x| < \frac{1}{\gamma \cdot n}$;

Entsprechendes gilt für $\int_{X}^{+1} \ln\left(\frac{X - \xi}{x - \xi}\right) \varrho_n^*(\xi)\, d\xi$. Außerdem ist, weil $\varrho_n^* = \text{const}$ im Intervall $(\xi_m; \xi_{m+1})$ und weil $\xi_m < x < X < \xi_{m+1}$,

$$\int_{x}^{X} \ln \left| \frac{X - \xi}{x - \xi} \right| \varrho_n^*(\xi)\, d\xi = \left(\int_{x}^{X} \ln \left| \frac{X - \xi}{x - \xi} \right| d\xi \right) \cdot \varrho_n^*(\xi_m) = 0.$$

Für $x > X$ wäre das Ergebnis dasselbe.

Aus (2.20), (2.20a) und (2.20b) folgt nun

Satz 2b: *Zu jedem $n=2;3;4\ldots$ sei ein Polynom $P_n=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots$ mit lauter einfachen, zwischen -1 und $+1$ gelegenen Nullstellen gegeben. Die relative Nullstellendichte ϱ_n^* der Polynome P_n sei im festen Intervall I^* durch* (2.17a) *gleichmäßig beschränkt. Bedeutet dann X irgendeine zu I^* gehörige Extremstelle des Polynoms P_n, so gilt die Abschätzung*

$$\ln|P_n(X)|=n\cdot\left[\int_{-1}^{+1}\ln|X-\xi|\cdot\varrho_n^*(\xi)\,d\xi+O\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right]^{8)}. \tag{2.21}$$

Die Integralabschätzung (2.21) gibt eine Vorstellung davon, wie stark sich selbst geringfügige Änderungen der relativen Nullstellendichte ϱ_n^* auswirken können: Vergrößert man etwa durch geeignete Änderung von ϱ_n^* das rechts stehende Integral in einem gewissen X-Intervall um mindestens $\varepsilon>0$ (ε unabhängig von n), so bedeutet dies die Multiplikation der Polynomextrema in diesem Intervall mit einem Faktor, der mindestens von der Größenordnung $e^{n\cdot\varepsilon}$ ist, d.h. der mit $n\to\infty$ selbst (sogar exponentiell) nach ∞ geht.

III. Anwendung auf die TSCHEBYSCHEFFsche Approximation.

Wir betrachten nun die Lösungen der TSCHEBYSCHEFFschen Approximationsaufgaben (1.5) mit vorgegebener Funktion $g(x)$ für $n=1;2;3\ldots$; sie haben die Gestalt

$$F_n=g(x)\cdot(x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\cdots+A_n).$$

Auf die rechts in der Klammer stehenden Polynome $P_n(x)$ wollen wir nun die Ergebnisse aus II. anwenden. Zu diesem Zweck setzen wir von den zugehörigen Nullstellendichten voraus, daß für jedes abgeschlossene Intervall

$$I^*\{|\xi|\leq 1-\varepsilon_0\}\quad\text{mit}\quad(1>)\ \varepsilon_0>0$$

$$\varrho^*(\xi)=\lim_{n\to\infty}\varrho_n^*(\xi) \tag{3.1}$$

gleichmäßig bezüglich ξ existiere sowie stetig und positiv sei. Als Zusatzvoraussetzung für $\xi\to\pm1$ verlangen wir nur

$$\varrho_n^*(\xi)<M\cdot|\xi\mp1|^{\alpha}\quad\text{mit}\quad\alpha>-1, \tag{3.1a}$$

wobei α und M zwei von n unabhängige Konstante sein sollen.

Sowohl (3.1) als auch (3.1a) ist beispielsweise in den Fällen (1.2a), (1.3a) und (1.4a) nach (1.8) erfüllt.

---

8) Die rechte Seite von (2.21) lautet genau so, wenn man statt der Extremstellen der Polynome P_n Extremstellen der Produkte $g\cdot P_n$ betrachtet und mit X bezeichnet, falls $g(x)$ eine von n unabhängige, stetige und im offenen Intervall $(-1;1)$ nirgends verschwindende Funktion bedeutet; die Korrekturgröße ϑ^* aus (2.15) würde nämlich dadurch nur um den Summanden $\frac{1}{n}\ln|g(x)|=O\left(\frac{1}{n}\right)$ verändert. Entsprechendes gilt auch für Satz 2a. „Extremstellen des Produkts $g\cdot P_n$" bedeuten hier Stellen absoluter Extrema in einem Intervall zwischen zwei benachbarten Nullstellen.

Nach Voraussetzung (3.1) ist mindestens von einem gewissen n an für jedes abgeschlossene Intervall I^* mit $\varepsilon_0 > 0$ die in (2.17a) ausgesprochene Bedingung erfüllt, daß die ϱ_n^* in I^* gleichmäßig (mit positiver oberer und unterer Schranke) beschränkt seien. Damit ist Satz 2b auf die Extremstellen X der hier betrachteten Polynome P_n anwendbar[9]). Nach Satz 1 muß notwendig zwischen je zwei Nullstellen von $F_n = g(x) \cdot P_n(x)$ eine Stelle liegen, an der F_n seinen (in $|x| \leq 1$) maximalen Betrag L_n annimmt. I_m bedeute das abgeschlossene Intervall zwischen den benachbarten Nullstellen ξ_m und ξ_{m+1} von P_n. Für dieses Intervall ist dann, $g(x)$ *positiv* vorausgesetzt[10]),

$$g_{\min} \cdot |P_n|_{\max} \leq |g \cdot P_n|_{\max} = L_n \leq g_{\max} \cdot |P_n|_{\max},$$

also

$$|P_n|_{\max} = \lambda_m \cdot L_n \quad \text{mit} \quad \frac{1}{g_{\max}} \leq \lambda_m \leq \frac{1}{g_{\min}}.$$

Man hat daher für eine Extremstelle X_m des Polynoms P_n

$$\frac{\ln |P_n(X_m)|}{n} = \frac{\ln L_n}{n} + \frac{\ln \lambda_m}{n}.$$

Da $g(x)$ nach Voraussetzung im *ganzen* Intervall I^* stetig und positiv ist, gilt, falls I_m zu I^* gehört,

$$\frac{1}{\underset{I^*}{\operatorname{Max}}\, g} \leq \lambda_m \leq \frac{1}{\underset{I^*}{\operatorname{Min}}\, g}.$$

$|\ln \lambda_m|$ hat daher bei Beschränkung auf ein festes Intervall I^* eine von m (und n) unabhängige obere Schranke Ω. Die Anwendung von Satz 2b ergibt infolgedessen für die sämtlichen zu I^* gehörigen Extremstellen von P_n die Abschätzung

$$\int_{-1}^{+1} \ln |X - \xi| \, \varrho_n^*(\xi) \, d\xi = \frac{\ln L_n}{n} + O\left(\frac{\ln n}{n}\right)^{11}) \tag{3.2}$$

$\frac{1}{n} \ln L_n$ ist dabei für alle betrachteten Extremstellen X des Polynoms P_n *dieselbe Zahl*. Wir wollen beweisen, daß daher aus (3.2) durch Grenzübergang mit $n \to \infty$ schließlich

$$\int_{-1}^{+1} \ln |x - \xi| \, \varrho^*(\xi) \, d\xi = \text{const} \quad \text{für} \quad -1 < x < 1 \tag{3.3}$$

folgt. Die *Existenz* des Integrals (3.3) ist durch die Voraussetzungen (3.1a) und (3.1) gesichert. Daß es im Intervall $-1 < x < 1$ wirklich unabhängig

[9]) Die Anwendbarkeit von Satz 2b wird nicht davon berührt, daß nach (2.2a) $\varrho_n^*(x) = 0$ auch in Punkten des Intervalls I^* möglich ist [jedoch nur für endlich viele n nach (3.1)]. Die in Satz 2b geforderte Einfachheit der Nullstellen ist bei den hier betrachteten P_n für *alle* n durch Satz 1 gesichert.

[10]) Die Annahme $g(x) > 0$ für $-1 < x < 1$ ist nach den Voraussetzungen zu Satz 1 ohne Einschränkung der Allgemeinheit möglich.

[11]) Dasselbe folgt aus der Anmerkung zu Satz 2b auch für die Extremstellen des Produkts gP_n zwischen je zwei seiner Nullstellen.

von x ist, beweisen wir *indirekt* und nehmen zu diesem Zweck entgegen der Behauptung (3.3) an, es gebe zwei Stellen $x_1; x_2$ im offenen Intervall $(-1; +1)$, so daß

$$\text{(A)} \qquad \int_{-1}^{+1} \mu \cdot \varrho^*(\xi)\, d\xi = d > 0 \quad \text{mit} \quad \mu = \ln \left| \frac{x_2 - \xi}{x_1 - \xi} \right| .$$

Nach (3.1a) gibt es ein $\varepsilon > 0$ derart, daß zugleich für alle ϱ_n^*

$$\text{(A 1)} \qquad \left| \int_{(\mp)1}^{(\mp)(1-\varepsilon)} \mu \cdot \varrho_n^*(\xi)\, d\xi \right| < \frac{d}{10}$$

und

$$\text{(A 2)} \qquad \left| \int_{(\mp)1}^{(\mp)(1-\varepsilon)} \mu \cdot \varrho^*(\xi)\, d\xi \right| < \frac{d}{10} .$$

Zu dem hier auftretenden ε gibt es nun aber nach (3.1) ein $N(\varepsilon)$, so daß für $n > N(\varepsilon)$ immer auch

$$\text{(A 3)} \qquad \left| \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} \mu \cdot (\varrho_n^* - \varrho)\, d\xi \right| < \frac{d}{5} .$$

Nun ist

$$\int_{-1}^{+1} \mu\, \varrho_n^*\, d\xi = \int_{-1}^{-1+\varepsilon} \mu\, \varrho_n^*\, d\xi + \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} \mu\, \varrho_n^*\, d\xi + \int_{1-\varepsilon}^{1} \mu\, \varrho_n^*\, d\xi$$

und

$$\int_{-1}^{+1} \mu\, \varrho^*\, d\xi = \int_{-1}^{-1+\varepsilon} \mu\, \varrho^*\, d\xi + \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} \mu\, \varrho^*\, d\xi + \int_{1-\varepsilon}^{1} \mu\, \varrho^*\, d\xi ,$$

wobei die rechts untereinanderstehenden Integrale nach (A 1) und (A 2) bzw. (bei den mittleren) nach (A 3) jeweils höchstens um $d/5$ voneinander abweichen. Nach (A) ist daher

$$\text{(A 4)} \qquad \int_{-1}^{+1} \mu\, \varrho_n^*\, d\xi = \int_{-1}^{+1} \ln \left| \frac{x_2 - \xi}{x_1 - \xi} \right| \varrho_n^*\, d\xi > \frac{2d}{5} \quad \text{für} \quad n > N(\varepsilon) .$$

Wegen (3.1) und (3.1a) ist aber zugleich für alle n

$$\left| \int_{-1}^{+1} \ln \left| \frac{X_2 - \xi}{X_1 - \xi} \right| \cdot \varrho_n^*(\xi)\, d\xi - \int_{-1}^{+1} \ln \left| \frac{x_2 - \xi}{x_1 - \xi} \right| \cdot \varrho_n^*(\xi)\, d\xi \right| < \frac{d}{5} ,$$

wenn nur $|X_k - x_k| < d^*$ $(k = 1; 2)$ mit einer hinreichend kleinen (von n unabhängigen) Größe d^*. [Man braucht nur wieder den Integrationsweg in zwei geeignete Randstücke und ein Mittelstück aufzuteilen, in den Randstücken (3.1a) und im Mittelstück die aus (3.1) folgende gleichmäßige Beschränktheit der ϱ_n^* zu berücksichtigen.] Damit folgt wegen (A 4)

$$\int_{-1}^{+1} \ln \left| \frac{X_2 - \xi}{X_1 - \xi} \right| \varrho_n^*(\xi)\, d\xi > \frac{d}{5} \quad \text{für alle} \quad n > N(\varepsilon) \quad \text{und} \quad |X_k - x_k| < d^* .$$

Für hinreichend große n sind aber in den Intervallen $|X_k - x_k| < d^*$ sicher Extremstellen des Polynoms P_n enthalten, weil der reziproke Abstand zweier Nullstellen, nämlich $\varrho_n = n \cdot \varrho_n^*$, nach (3.1) mit $n \to \infty$ im ganzen Intervall $-1 < x < 1$ gegen ∞ geht.

Wenn nur n hinreichend groß ist, folgt also aus (A) die Existenz von solchen Extremstellen X_1 und X_2 des Polynoms P_n, für die

$$\int_{-1}^{+1} \ln \left| \frac{X_2 - \xi}{X_1 - \xi} \right| \varrho_n^*(\xi)\, d\xi > \frac{d}{5}.$$

Dies steht aber in Widerspruch dazu, daß nach (3.2)[12]) für solche Extremstellen sicher z. B.

$$\left| \int_{-1}^{+1} \ln \left| \frac{X_2 - \xi}{X_1 - \xi} \right| \varrho_n^*(\xi)\, d\xi \right| < \frac{d}{10}$$

ist, wenn nur n genügend groß ist. Die Behauptung (3.3) ist damit bewiesen. Wir fassen das Ergebnis zusammen in

Satz 3: *Die Polynome $P_n(x)$ seien die in den Lösungen der* Tschebyscheffschen *Approximationsaufgabe* (1.5) *bei vorgegebenem $g(x)$ auftretenden Faktoren $x^n + A_1 x^{n-1} + \cdots + A_n$. Konvergieren die zugehörigen relativen Nullstellendichten $\varrho_n^*(\xi)$ in jedem Intervall $I^* \{|\zeta| \leqq 1 - \varepsilon_0;\ \varepsilon_0 > 0\}$ gleichmäßig gegen eine stetige und positive Grenzfunktion ϱ^* und sind sie für $\xi \to \pm 1$ zugleich für alle n beschränkt durch $M \cdot |\xi \mp 1|^{\alpha}$ mit $\alpha > -1$, so ist für diese Grenzfunktion*

$$\int_{-1}^{+1} \ln |x - \xi|\, \varrho^*(\xi)\, d\xi = \text{const} \quad \textit{für} \quad -1 < x < 1. \tag{3.4}$$

Die Voraussetzungen des Satzes 3 sind, wie bereits erwähnt, erfüllt bei den Beispielen aus I. Dort ergab sich $\varrho^* = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot \frac{1}{\pi}$; also ist nach Satz 3 sicher

$$j(x) = \int_{-1}^{+1} \frac{\ln |x - \xi|}{\sqrt{1 - \xi^2}}\, d\xi = \text{const} \quad \text{für} \quad -1 < x < +1. \tag{3.5}$$

Dies läßt sich übrigens auch unmittelbar durch komplexe Integration zeigen: Wegen $\ln z = \ln |z| + i \arg z$ ist

$$j(x) = \text{Realteil} \left\{ \int_{-1}^{+1} \frac{\ln (x - \xi)}{\sqrt{1 - \xi^2}}\, d\xi \right\},$$

wobei wir uns die Stelle $\xi = x$ durch einen kleinen Halbkreis im Sinn der Fig. 2 umgangen denken [bei hinreichend kleinem Radius macht dies für $j(x)$ beliebig wenig aus; das Vorzeichen der Wurzel im Nenner ist hier natürlich

[12]) Wobei ε_0, d. h. das Intervall I^* so zu wählen ist, daß X_1 und X_2 zu I^* gehören [dies geht immer, weil X_1 und X_2 innere Punkte des Intervalls $(-1; +1)$ sind].

durchweg positiv zu wählen]. Wir betrachten nun statt des bisherigen Integrationswegs den aus Fig. 3 ersichtlichen geschlossenen, zur reellen ξ-Achse symmetrischen Weg $\mathfrak{C}$, beginnend bei A mit positivem Vorzeichen der Wurzel. Dann hat man im unteren Teil des Wegs nicht nur negatives $d\xi$, sondern auch negatives Vorzeichen der Wurzel (weil der Punkt $+1$ durch einen kleinen Kreis umfahren wurde). $\ln(x-\xi)$ hat an entsprechenden Punkten (mit gleichem Realteil von ξ) des oberen und unteren Teilwegs denselben

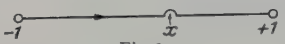

Fig. 2.

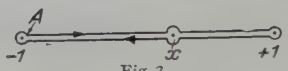

Fig. 3.

Realteil. Der Beitrag der kleinen Kreise um ± 1 zum Gesamtintegral ist bei hinreichend kleinem Radius beliebig gering. Also ist

$$j(x) = \frac{1}{2}\,\text{Realteil}\left\{\int_{\mathfrak{C}} \frac{\ln(x-\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}}\,d\xi\right\}.$$

Auf dem Weg $\mathfrak{C}$ ist der Integrand durchweg regulär. Daher ist

$$\frac{dj(x)}{dx} = \frac{1}{2}\,\text{Realteil}\left\{\int_{\mathfrak{C}} \frac{d\xi}{(x-\xi)\sqrt{1-\xi^2}}\right\} = 0,$$

weil statt des geschlossenen Wegs $\mathfrak{C}$ auch ein Kreis von beliebig großem Radius $R(>1)$ um $\xi=0$ als Integrationsweg gewählt werden kann (zwischen $\mathfrak{C}$ und diesem Kreis liegen keine singulären Stellen des Integranden) und weil der Integrand für $\xi\to\infty$ wie ξ^{-2} verschwindet. Dies gilt für beliebige x im Bereich $-1<x<1$, woraus unmittelbar

$$j(x) = \text{const} \quad \text{für} \quad -1<x<1$$

als Bestätigung des Ergebnisses (3.4) folgt.

Daß die Konstante C in $\varrho^* = \dfrac{C}{\sqrt{1-\xi^2}}$ notwendig gleich $\dfrac{1}{\pi}$ ist, folgt aus

$$\int_{-1}^{+1} \varrho_n^*\,d\xi = \frac{1}{n}\int_{-1}^{+1} \varrho_n\,d\xi = \frac{n-1}{n} \to 1 \quad \text{mit} \quad n\to\infty.$$

In den hier durchgeführten Überlegungen steckt zwar noch kein Beweis dafür, daß

$$\int_{-1}^{+1} \ln|x-\xi|\,\varrho^*(\xi)\,d\xi = \text{const} \quad \text{für} \quad -1<x<1$$

nur durch $\varrho^* = \dfrac{\text{const}}{\sqrt{1-\xi^2}}$ erfüllt werden kann. Trotzdem [und trotz der hier offen gelassenen Frage, ob die Konvergenz- und Beschränktheitsvoraussetzungen (3.1) und (3.1a) immer erfüllt sind] legen die durchgeführten Abschätzungen folgenden Weg für die praktische Behandlung TSCHEBYSCHEFFscher Approximationsaufgaben der Gestalt (1.5) im Intervall $(-1;1)$ nahe: *Man wird das zu einer Lösung $F_n = g\cdot P_n$ gehörige $P_n(x)$ unter solchen*

Polynomen suchen, deren Nullstellenverteilung und damit auch deren Extremstellenverteilung sich (wenigstens für hinreichend große n) nur wenig von derjenigen bei den gewöhnlichen TSCHEBYSCHEFF*schen Polynomen gleichen Grades unterscheidet.*

IV. Numerisches Beispiel; Iterationsverfahren.

Zur rechnerischen Durchführung geht man zweckmäßig von den *Extremstellen* aus. Beim TSCHEBYSCHEFFschen Polynom n-ten Grades liegen sie an den Punkten $x = \cos \frac{\nu \pi}{n}$ $(\nu = 0; 1; \ldots n)$. Liegt eine Approximationsaufgabe der Gestalt (1.5) vor, so verlangen wir demnach zunächst von einem Polynom $P_n^{(\mathrm{I})}$, daß mit wechselndem Vorzeichen

$$g(x) \cdot P_n^{(\mathrm{I})}(x) = \pm L^{(\mathrm{I})} \quad \text{für} \quad x = \cos \frac{\nu \pi}{n} \qquad (\nu = 0; 1; \ldots n) \tag{4.1}$$

und daß es bei x^n den Koeffizienten 1 hat. Da $g(x)$ bekannt ist, sind dies $n+1$ lineare Gleichungen für die n unbekannten Koeffizienten von $P_n^{(\mathrm{I})}$ und für die unbekannte Konstante $L^{(\mathrm{I})}$. Die Rechnung läuft auf eine gewöhnliche Interpolationsaufgabe hinaus: Man stellt zunächst ohne Rücksicht auf den Koeffizienten bei x^n und für allgemeines L das Polynom P_n auf, das den Bedingungen

$$g(x) \cdot P_n(x) = \pm L \quad \text{für} \quad x = \cos \frac{\nu \pi}{n} \qquad (\nu = 0; 1; \ldots n) \tag{4.1a}$$

genügt und bestimmt dann L so, daß der Koeffizient von x^n den Wert 1 bekommt.

Natürlich wird durch (4.1) nicht erzwungen, daß die Werte $x = \cos \frac{\nu \pi}{n}$ zugleich die Extremstellen von $g P_n^{(\mathrm{I})}$ darstellen. Aber man wird das Ergebnis in vielen Fällen bereits als recht brauchbare erste Näherungslösung der Aufgabe (1.5) erkennen.

Zu einer *zweiten Näherung* kann man dann folgendermaßen kommen: Durch die Nullstellen von $P_n^{(\mathrm{I})}$ wird das Approximationsintervall in $n+1$ Teile zerlegt, die der Größe nach geordnet seien. Im ν. dieser Teilintervalle nehme $g P_n^{(\mathrm{I})}$ seinen maximalen Betrag an einer Stelle $x_\nu^{(\mathrm{I})}$ an (entsprechend den Stellen $x = \cos \frac{\nu \pi}{n}$ bei den TSCHEBYSCHEFFschen Polynomen). Wir verlangen nun von der zweiten Näherung $g P_n^{(\mathrm{II})}$, daß

$$g(x) \cdot P_n^{(\mathrm{II})}(x) = \pm L^{(\mathrm{II})} \quad \text{für} \quad x = x_\nu^{(\mathrm{I})} \quad (\nu = 0; 1; \ldots n) \tag{4.2}$$

mit wechselndem Vorzeichen, aber gleichem Betrag $L^{(\mathrm{II})}$, und können gegebenenfalls das damit angedeutete Verfahren wiederholen.

Wir betrachten folgendes Beispiel: Unter allen Funktionen von x der Gestalt

$$f = e^{-x}(x^6 + a_1 x^5 + a_2 x^4 + \cdots + a_6) \tag{4.3}$$

soll durch geeignete Wahl der a_ν diejenige ausgesucht werden, für die

$$\operatorname*{Max}_{-1 \le x \le 1} |f| \tag{4.3a}$$

möglichst klein ist. In der Bezeichnungsweise von Satz 1 ist hier also $g(x) = e^{-x}$. Entsprechend der Vorschrift (4.1) suchen wir zunächst dasjenige Polynom $P(x) = x^6 + a_1 x^5 + \cdots$ [13]), für das (mit einer geeigneten Konstanten $L^{(I)}$)

$$e^{-x} \cdot P(x) = \pm L^{(I)} \qquad \text{für} \quad x = \cos \frac{\nu \pi}{6} \quad (\nu = 0; 1; \ldots 6), \tag{4.4}$$

also (mit wechselndem Vorzeichen)

$$P(x) = \pm L^{(I)} \cdot e^{x} \quad \text{für} \quad x = \pm 1;\ \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{3};\ \pm \tfrac{1}{2};\ 0. \tag{4.4a}$$

Mit

$$p(x) = (x^2 - 1)\,(x^2 - \tfrac{3}{4})\,(x^2 - \tfrac{1}{4}) \cdot x \tag{4.4b}$$

ergibt sich nach der LAGRANGEschen Interpolationsformel

$$\left\{ \begin{aligned} P(x) = L^{(I)} \cdot p(x) \cdot \Big[&\frac{7{,}25}{x-1} + \frac{12{,}68}{x-0{,}866} + \frac{8{,}78}{x-0{,}5} + \frac{5{,}33}{x} + \\ &+ \frac{3{,}235}{x+0{,}5} + \frac{2{,}24}{x+0{,}886} + \frac{0{,}98}{x+1} \Big], \end{aligned} \right. \tag{4.4c}$$

wobei

$$L^{(I)} = 0{,}0247. \tag{4.4d}$$

Die im Innern des Intervalls $(-1; +1)$ gelegenen (relativen) Extremstellen von $y = e^{-x} P(x)$ mit $P(x)$ aus (4.4c) sind näherungsweise aus der folgenden Zusammenstellung zu entnehmen:

$$\left\{ \begin{array}{lccccc} x & 0{,}82 & 0{,}4 & -0{,}15 & -0{,}6 & -0{,}90 \\ y & -0{,}027 & 0{,}032 & -0{,}038 & 0{,}038 & -0{,}031. \end{array} \right. \tag{4.4e}$$

Der Einfachheit halber sind dabei die x-Werte nicht genauer angegeben, als es für die weitere Rechnung nötig erschien.

Die in (4.4e) stehenden x sind zusammen mit den Werten ± 1 die in (4.2) mit $x_\nu^{(I)}$ bezeichneten Extremstellen der „ersten Näherung" $g \cdot P_n^{(I)}$. Für die zweite Näherung [in (4.2) mit $P_n^{(II)}$, im folgenden kurz mit Q bezeichnet] verlangen wir entsprechend der Vorschrift (4.2) nun

$$e^{-x} \cdot Q(x) = \pm L^{(II)} \quad \text{für} \quad x = x_\nu^{(I)}, \tag{4.5}$$

also

$$Q(x) = \pm L^{(II)} \cdot e^{x} \quad \text{für} \quad x = 1; 0{,}82; 0{,}4; -0{,}15; -0{,}6; -0{,}90; -1. \tag{4.5a}$$

Mit

$$q(x) = (x^2 - 1)\,(x - 0{,}82)\,(x - 0{,}4)\,(x + 0{,}15)\,(x + 0{,}6)\,(x + 0{,}9) \tag{4.5b}$$

ergibt sich daraus wieder nach der LAGRANGEschen Interpolationsformel

$$\left\{ \begin{aligned} Q(x) = L^{(II)} \cdot q(x) \cdot \Big[&\frac{3{,}60}{x-1} + \frac{6{,}97}{x-0{,}82} + \frac{5{,}92}{x-0{,}4} + \frac{4{,}89}{x+0{,}15} + \\ &+ \frac{4{,}48}{x+0{,}6} + \frac{4{,}26}{x+0{,}9} + \frac{2{,}125}{x+1} \Big], \end{aligned} \right. \tag{4.5c}$$

[13]) In (4.1) mit $P_n^{(I)}(x)$ bezeichnet.

vobei

(4.5d) $$L^{(II)} = 0{,}0310.$$

Die im Intervall $(-1;+1)$ gelegenen (relativen) Extremstellen von $y = e^{-x}Q(x)$ mit $Q(x)$ aus (4.5c) sind dann näherungsweise aus der folgenden Zusammenstellung zu ersehen:

(4.5e)

x	0,81	0,36	$-0{,}16$	$-0{,}60$	$-0{,}90$	± 1
y	$-0{,}0310$	$0{,}031_8$	$-0{,}0310$	0,031	$-0{,}0310$	0,0310

Unsicherheit in den x-Werten etwa 10^{-2}, in den y-Werten etwa $2 \cdot 10^{-4}$). Aus (4.5e) folgt bereits, daß der maximale Betrag der exakten Lösung $P^*(x) = e^{-x} P^*(x)$ unserer Aufgabe (4.3a) im Intervall $(-1;1)$ zwischen 0,031 und 0,032 liegen muß. (Die Begründung hierfür entspricht genau derjenigen für die hinreichende Bedingung in Satz 1.)

Das hier angedeutete Iterationsverfahren entspricht einem von REMES [6] für eine andere Klasse von TSCHEBYSCHEFFschen Approximationsaufgaben beschriebenen Weg; dort handelt es sich in unserer Bezeichnungsweise darum, $\max |P_n(x) - v(x)|$ in einem gegebenen Intervall bei gegebenem $v(x)$ und gegebenem n möglichst klein zu machen. Der dortige Konvergenzbeweis läßt sich sinngemäß auch auf unseren Fall übertragen:

Der Kürze halber verwenden wir wieder die Bezeichnungen P und Q des Zahlenbeispiels sowie die Abkürzungen x_ν für $x_\nu^{(I)}$ und

(4.6) $$g = g_\nu; \qquad |g \cdot P| = \Delta_\nu; \qquad |g \cdot Q| = \lambda^{14}) \quad \text{für} \quad x = x_\nu.$$

Nach der LAGRANGEschen Interpolationsformel ist dann

(4.7) $$P = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\pm \Delta_\nu}{g_\nu} \cdot \frac{\prod_{k \neq \nu} (x - x_k)}{\prod_{k \neq \nu} (x_\nu - x_k)}; \qquad Q = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\pm \lambda}{g_\nu} \cdot \frac{\prod_{k \neq \nu} (x - x_k)}{\prod_{k \neq \nu} (x_\nu - x_k)},$$

wobei die Vorzeichen $\pm$ immer von einem ν zum nächsten wechseln. Da sowohl P als auch Q bei x^n den Koeffizienten 1 haben muß, folgt

(4.8) $$(1 =) \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\Delta_\nu}{\pm g_\nu \prod_{k \neq \nu} (x_\nu - x_k)} = \lambda \cdot \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{\pm g_\nu \cdot \prod_{k \neq \nu} (x_\nu - x_k)},$$

und damit (weil $\prod_{k \neq \nu}$ im Nenner ebenfalls mit wachsendem ν jedesmal sein Vorzeichen wechselt)

(4.9) $$\lambda = \frac{\sum \Delta_\nu c_\nu}{\sum c_\nu} \quad \text{mit der Abkürzung} \quad c_\nu = g_\nu \cdot \prod_{k \neq \nu} (x_\nu - x_k)^{-1}.$$

λ ist also (wie ϱ' bei REMES) ein „gewogenes Mittel" aus den Δ_ν; daher ist sicher

(4.10) $$\alpha < \lambda < \beta \quad \text{mit den Abkürzungen} \quad \alpha = \min_{(\nu)} \cdot \Delta_\nu; \qquad \beta = \max_{(\nu)} \cdot \Delta_\nu.$$

[14]) In (4.2) und (4.5) mit $L^{(II)}$ bezeichnet.

Bei einer Wiederholung des Verfahrens, das von $P(x)$ zu $Q(x)$ geführt hat, treten an die Stelle der Größen $\Delta_\nu; \alpha; \beta$ andere, zu $Q(x)$ gehörige Werte, die wir hier durch Querstriche kennzeichnen wollen: $\bar{\Delta}_\nu; \bar{\alpha}; \bar{\beta}$.

Nun ist sicher

$$\lambda \leq \bar{\alpha} \left(= \min_{(\nu)} \bar{\Delta}_\nu\right) \tag{4.11}$$

[weil $\bar{\Delta}_\nu$ jeweils den Maximalbetrag von gQ in einem Teilintervall bedeutet und in jedem solchen Teilintervall — vgl. (4.6) — mindestens einmal $|gQ| = \lambda$ ist].

Ferner ist

$$\bar{\alpha} \leq L^*, \tag{4.12}$$

wenn L^* den Maximalbetrag der exakten Lösung gP^* im Approximationsintervall bedeutet. Sonst müßte nämlich die Differenz $P^* - Q$ mehr als $n-1$ Nullstellen haben, obwohl sie ein Polynom höchstens $n-1$-ten Grades ist, ohne (wenn $\bar{\alpha} > L^*$ wäre) identisch verschwinden zu können.

Aus (4.12), (4.11) und (4.10) folgt

$$0 \leq L^* - \bar{\alpha} \leq \vartheta \cdot (L^* - \alpha) \quad \text{mit} \quad 0 < \vartheta < 1, \tag{4.13}$$

d.h. der Unterschied zwischen den gleich hohen Maximalbeträgen L^* der exakten Lösung gP^* und dem kleinsten Maximalbetrag der Näherungslösung gP bzw. gQ hat bei der Iteration abgenommen. Das Entsprechende gilt auch bei weiteren Iterationsschritten, und zwar mit einem für alle Schritte gemeinsamen ϑ (weil die „Gewichte" c_ν *gleichmäßig* zwischen zwei festen positiven Schranken liegen, vgl. REMES [6]), wenn $g(x)$ stetig und $\neq 0$ für $-1 \leq x \leq +1$ ist.

Die der Differenz $L^* - \alpha$ entsprechenden Differenzen konvergieren daher bei dem geschilderten Iterationsverfahren gegen 0. Daraus folgt aber auch dasselbe für die der Differenz $\beta - L^*$ entsprechenden Differenzen. Wegen (4.10) ist nämlich mit einer positiven Größe $\vartheta' (< 1)$, die man wieder so wählen kann, daß sie zugleich auch für alle weiteren Iterationsschritte brauchbar ist, $\lambda - \alpha > \vartheta' (\beta - \alpha)$ und daher unter Benutzung von (4.11) und (4.12)

$$\beta - L^* \leq \beta - \alpha < \frac{\lambda - \alpha}{\vartheta'} \leq \frac{L^* - \alpha}{\vartheta'}.$$

Damit haben wir für Aufgaben der Gestalt (1.5), Satz 1, mit stetigem $g(x) \neq 1$ in $-1 \leq x \leq 1$ den folgenden

Satz 4: *Das durch* (4.2) *beschriebene und in* (4.5) *benutzte Iterationsverfahren konvergiert, wobei die Differenz zwischen den maximalen Beträgen der Näherungslösungen und dem Maximalbetrag L^* der exakten Lösung mindestens vergleichbar mit einer geometrischen Folge gegen* 0 *geht.*

V. Ausblick auf Verallgemeinerungen.

a) Zunächst eine Bemerkung zum Approximationsintervall: Sowohl die abgeleiteten Sätze wie die für die Praxis angegebenen Methoden gelten zunächst nur für das Approximationsintervall $(-1; +1)$. Sie lassen sich aber

jederzeit auch auf beliebige andere (reelle) Approximationsintervalle $(A; B)$ mittels der Transformation

$$x = \frac{A+B}{2} + \frac{B-A}{2}\, y \tag{5.1}$$

übertragen, die dem Intervall $A \leqq x \leqq B$ umkehrbar eindeutig das Intervall $-1 \leqq y \leqq +1$ zuordnet.

b) Nach den grundlegenden Sätzen über TSCHEBYSCHEFFsche Approximation gilt Satz 1 sinngemäß auch für die Aufgabe, die Koeffizienten a_ν in $P_{n-1}(x) = a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ so zu bestimmen, daß bei vorgegebenen (stetigen) Funktionen $g(x)$ und $v(x)$

$$\operatorname*{Max}_{-1 \leqq x \leqq 1} |g(x)\, P_{n-1}(x) - v(x)| \tag{5.2}$$

möglichst klein wird, wenn nur $g(x) \neq 0$ für $-1 \leqq x \leqq 1$. Für die Lösung ist auch hier wieder notwendig und hinreichend, daß

$$g(x)\, P_{n-1}(x) - v(x) = \pm L \tag{5.3}$$

mit wechselnden Vorzeichen an (mindestens) $n+1$ der Größe nach geordneten Stellen des Approximationsintervalls, wenn L den maximalen Betrag der linken Seite in diesem Intervall bedeutet.

Für die Praxis könnte man das in IV. angegebene Verfahren auf den allgemeineren Fall (5.2) folgendermaßen übertragen:

Um zu einer ersten Näherung $P_{n-1}^{(\mathrm{I})}(x)$ für das gesuchte Polynom zu kommen, löst man zuerst bei allgemeinem L die Interpolationsaufgabe

$$g(x)\, P_n(x) = v(x) \pm L \quad \text{für} \quad x = \cos\frac{\nu\pi}{n}, \qquad (\nu = 0; \ldots n) \tag{5.4}$$

(mit wechselndem Vorzeichen bei L) und bestimmt nachträglich L so, daß der Koeffizient von x^n in $P_n(x)$ verschwindet (dies ist immer möglich). Das so entstandene Polynom $n-1$. Grades bezeichnen wir nun mit $P_{n-1}^{(\mathrm{I})}(x)$. Für die zweite Näherung $P_{n-1}^{(\mathrm{II})}(x)$ müßte man dann entsprechend dem in IV. angegebenen Verfahren die Stellen $x = \cos\frac{\nu\pi}{n}$ durch geeignete (und sicher in ausreichender Zahl vorhandene) Argumentwerte x_ν der Differenz $y = g\, P_{n-1}^{(\mathrm{I})} - v$ ersetzen, und zwar in unmittelbarer Anlehnung an [6] und etwas allgemeiner als in der Erläuterung vor (4.2) folgendermaßen: Die x_ν seien so ausgewählt, daß 1. die Funktionswerte $y(x_\nu)$ für benachbarte x_ν immer verschiedenes Vorzeichen haben und 2. sowohl $\alpha = \operatorname*{Min}_{(\nu)} |y(x_\nu)|$ als auch $\beta = \operatorname*{Max}_{(\nu)} |y(x_\nu)|$ so groß werden wie es auf Grund der Differenzfunktion $y(x)$ möglich ist.

Die theoretische Fundierung, die Satz 2b und Satz 3 für den *Anfangsschritt* des in IV. geschilderten Verfahrens geben, läßt sich auf (5.2) allerdings nicht ohne weiteres übertragen [es gibt jedoch mit gewissen Einschränkungen eine andere, von hinreichend kleinen Approximationsintervallen[15]) ausgehende Rechtfertigung für den in (5.4) angedeuteten Ansatz; hierauf soll bei anderer Gelegenheit näher eingegangen werden]. Der in IV. gegebene

[15]) Im Fall $g \equiv 1$ schon von KIRCHBERGER [5], S. 35 benutzt.

Konvergenzbeweis für das Iterationsverfahren, das sich an die erste Näherung anschloß, kann dagegen unmittelbar auf den Fall (5.2) verallgemeinert werden:

Entsprechend dem Beweis in IV. verwenden wir dazu die Abkürzungen P und Q für $P_{n-1}^{(\mathrm{I})}$ und $P_{n-1}^{(\mathrm{II})}$, bezeichnen die ausgesuchten Argumentwerte, an denen $|gQ-v|$ den Betrag λ haben soll, wieder mit x_ν und nennen die Werte der Funktionen $g(x)$ und $v(x)$ an diesen Stellen kurz g_ν und v_ν. Ferner sei $|gP-v|=\Delta_\nu$ für $x=x_\nu$.

Den Gln. (4.7) entspricht dann

$$(5.5)\qquad P=\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{v_\nu\pm\Delta_\nu}{g_\nu}\cdot\frac{\prod_{k\neq\nu}(x-x_k)}{\prod_{k\neq\nu}(x_\nu-x_k)};\qquad Q=\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{v_\nu\pm\lambda}{g_\nu}\cdot\frac{\prod_{k\neq\nu}(x-x_k)}{\prod_{k\neq\nu}(x_\nu-x_k)}.$$

Da sowohl P als auch Q hier nur vom $n-1$-ten Grad sein sollen, folgt aus (5.5)

$$\sum\frac{\pm\Delta_\nu}{g_\nu}\cdot\frac{1}{\prod_{k\neq\nu}(x_\nu-x_k)}=\lambda\cdot\sum\frac{\pm 1}{g_\nu\cdot\prod_{k\neq\nu}(x_\nu-x_k)}$$

und damit für λ genau dasselbe wie in (4.9). Von hier ab läuft der Konvergenzbeweis sinngemäß genau wie in IV.

Sowohl die Approximationsaufgaben aus Satz 1[16]) als auch diejenigen aus [6] sind Spezialfälle der Aufgaben (5.2). (5.2) läßt übrigens nicht nur die Deutung zu, daß $v(x)$ durch eine Funktion der Gestalt $g(x)\,P_{n-1}(x)$ angenähert werden soll: Faßt man $v(x)$ als Abkürzung für das Produkt $g(x)\cdot\psi(x)$ bei gegebenem $\psi(x)$ auf, so kann man (5.2) auch deuten als die Aufgabe, $\psi(x)$ durch $P_{n-1}(x)$ mit unterschiedlicher, durch $g(x)$ angedeuteter Toleranzbreite im Approximationsintervall anzunähern — was in Anwendungen häufig vorkommen kann. Im Beispiel $g(x)=e^{-x}$, vgl. (4.3), würde dies bedeuten, daß nahe bei $x=-1$ relativ große Genauigkeit, dagegen nahe bei $x=1$ relativ geringere Genauigkeit der Annäherung durch das gesuchte Polynom verlangt wird.

c) In der Elektrotechnik (Siebschaltungen der Wechselstromtechnik, vgl. [3]) spielen unter anderem Approximationsaufgaben folgender Art eine Rolle: In

$$(5.5)\qquad f=\prod_{\nu=1}^{n}\frac{x-\xi_\nu}{1-\xi_\nu x}$$

sollen die ξ_ν so bestimmt werden, daß (mit $d<1$)

$$\operatorname*{Max}_{0\leqq x\leqq d}|f|$$

möglichst klein wird.

Eine allgemeinere Aufgabe — mit anderem Approximationsintervall — wäre z.B. die Forderung, in

$$(5.6)\qquad f=g(x)\cdot\prod_{\nu=1}^{n}\frac{x-\xi_\nu}{1-\psi(\xi_\nu)\cdot x}$$

die ξ_ν so zu bestimmen, daß wieder

$$\operatorname*{Max}_{-1\leqq x\leqq 1}|f|$$

[16]) Mit $g(x)\neq 0$ für $-1\leqq x\leqq 1$.

möglichst klein wird. Dabei sollen n; $g(x)$ unter der Voraussetzung $g(x) \neq 0$ im Intervall $-1 < x < 1$ und $\psi(\xi)$ unter der Voraussetzung $\frac{1}{|\psi|} \geq D > 1$ für $|\xi| \leq 1$ vorgegeben sein. In Anlehnung an II. und III. liegt es dann nahe, — ohne daß wir hier auf die Frage nach weiteren Voraussetzungen, die dazu noch nötig wären, eingehen — $|f|$ zu ersetzen durch

$$e^{n \cdot \left[\int_{-1}^{+1} \ln \left| \frac{x-\xi}{1-\psi(\xi)\, x} \right| \cdot \varrho_n^*(\xi)\, d\xi + O\left(\frac{\ln n}{n}\right) \right]}$$

mit der gleichen Bedeutung der relativen Nullstellendichte ϱ_n^* wie in II.

Für die Approximationsaufgabe (5.6) lautet dann in allen Fällen, in denen Satz 1 sinngemäß übertragbar ist — d.h. $n+1$ Extrema gleichen Betrags und wechselnden Vorzeichens der Lösung F im Intervall $(-1; 1)$ — die zu (3.3) analoge Forderung

$$\int_{-1}^{+1} \ln \left| \frac{x-\xi}{1-\psi(\xi)\cdot x} \right| \cdot \varrho^*(\xi) = \text{const}. \tag{5.7}$$

Sie ist wieder unabhängig von $g(x)$ und hängt nur ab von $\psi(\xi)$.

Die Frage der Zulässigkeit dieser Analogie bzw. der Voraussetzungen, die hierfür noch nötig wären, soll auch hier nicht weiter untersucht werden. Die angedeuteten Zusammenhänge geben aber trotzdem bereits einen Hinweis darauf, daß die asymptotische Nullstellenverteilung im Approximationsintervall auch unter sehr allgemeinen Voraussetzungen *nicht* vom Faktor $g(x)$, sondern entscheidend nur von $\psi(\xi)$ in (5.6) abhängen wird. Man kann daher für die Praxis bei gegebenem $\psi(\xi)$, wenn man die asymptotische Nullstellenverteilung z.B. im Fall $g(x) \equiv 1$ kennt, analog dem in IV. geschilderten Verfahren versuchen, auch für andere $g(x)$ zu Näherungslösungen zu kommen.

Literatur.

[1] Tschebyscheff: Gesammelte Werke, Bd. 1, S. 271. Petersburg 1899. (Sur les questions de minima qui se rattachent à la représentation approximative des fonctions; 1857.) — [2] Lense: Reihenentwicklungen in der mathematischen Physik, 2. Aufl. Berlin 1947. — [3] Cauer: Theorie der linearen Wechselstromschaltungen, Bd. 1, insbes. S. 548ff. Leipzig 1941. — [4] Bernstein: Leçons sur les Propriétés extrémales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle. Paris 1926. — [5] Kirchberger: Über Tschebyscheffsche Annäherungsmethoden. Diss. Göttingen 1902. — [6] Remes: Sur le calcul effectif des polynomes d'approximation de Tchebichef. C. R. Acad. Sci., Paris **199**, 337 (1934).

München, Walhallastr. 5.

(Eingegangen am 14. März 1953.)

Carlitz, L.
Math. Zeitschr. Bd. 59, S. 40—46 (1953)

Weighted quadratic partitions (mod p^r).

By
Leonard Carlitz.

1. Introduction. Let p be a prime >2. In this paper we discuss the sum

$$S=\sum_{x_1,\dots,x_t} e_r(2\lambda_1 x_1+\cdots+2\lambda_t x_t), \tag{1.1}$$

where

$$e_r(x)=e^{2\pi i x/p^r} \tag{1.2}$$

and the summation is over all integers (mod p^r) such that

$$a_1 x_1^2+\cdots+a_t x_t^2\equiv c \pmod{p^r},$$

and $\lambda_1,\dots,\lambda_t, a_1,\dots,a_t, c$ are fixed integers. The case $r=1$ has been discussed elsewhere [*1*]. To simplify the present discussion we assume that all the a_i are prime to p. We show in § 3 that S can be expressed in terms of Gauss and Kloosterman sums. To obtain simpler explicit results we make the additional assumption

$$(\lambda_1,\dots,\lambda_t,p)=1.$$

The final result is stated as a theorem at the end of § 4. In particular if we put

$$\delta=\prod_{i=1}^{t} a_i, \qquad \omega=\sum_{i=1}^{t} a_i' \lambda_i^2 \quad (a_i' a_i\equiv 1 \pmod{p^r}),$$

we find that $S=0$ for $\left(\frac{c\omega}{p}\right)=-1$, while

$$S=2\left(\frac{\delta}{p}\right)^r\left(\frac{-1}{p}\right)^{\frac{1}{2}rt} p^{\frac{1}{2}rt-r}\cos\left(\frac{4\pi k}{p^r}+\frac{1}{8}(p^r-1)^2\pi\right) \quad (rt \text{ even}), \tag{1.3}$$

$$S=2\left(\frac{(-1)^{\frac{1}{2}(t-1)}\delta c}{p}\right)p^{\frac{1}{2}r(t+1)}\cos\frac{4\pi k}{p^r} \quad (rt \text{ odd}), \tag{1.4}$$

where $c\omega\equiv k^2 \pmod{p^r}$ and $r\geqq 2$.

2. Preliminaries.

Lemma 1.

$$\sum_{x \pmod{p^r}} e_r(ax)=\begin{cases} p^r & (a\equiv 0 \pmod{p^r}),\\ 0 & (\text{otherwise}).\end{cases} \tag{2.1}$$

This is an immediate consequence of (1.2).

Let $\left(\frac{a}{b}\right)$ denote the Legendre-Jacobi symbol and put

$$G(a)=G_r(a)=\sum_{x \pmod{p^r}} e_r(ax^2). \tag{2.2}$$

Lemma 2. *For* $p \nmid a$,

(2.3) $$G(a) = \left(\frac{a}{p^r}\right) G(1), \qquad G^2(a) = \left(\frac{-1}{p}\right)^r p^r,$$

and

(2.4) $$G(1) = i^{(p^r-1)^2/4}\, p^{\frac{1}{2}r}.$$

For proof see for example [2, p. 153].

Lemma 3. *Let* $p^s \| a$, $p^{s+1} \nmid a$, $s \leq r$; *then*

(2.5) $$S_r(a, b) = \sum_{x \pmod{p^r}} e_r(a x^2 + 2 b x) = \begin{cases} 0 & (p^s \nmid b) \\ p^s e_{r-s}(-a_1' b_1^2)\, G_{r-s}(a_1) & (p^s \| b), \end{cases}$$

where $a = p^s a_1$, $b = p^s b_1$, $a_1 a_1' \equiv 1 \pmod{p^{r-s}}$.

Put $x = y\, p^{r-s} + z$; then the left member of (2.5) becomes

$$\sum_{z \pmod{p^{r-s}}} e_r(a z^2 + 2 b z) \sum_{y \pmod{p^s}} e_s(2 b y).$$

By Lemma 1, the inner sum vanishes unless $p^s \| b$. If however $p^s \| b$, we get

$$\begin{aligned} & p^s \sum_{z \pmod{p^{r-s}}} e_{r-s}(a_1 z^2 + 2 b_1 z) \\ & \quad = p^s\, e_{r-s}(-a_1' b_1^2) \sum_{z \pmod{p^{r-s}}} e_{r-s}(a_1 z^2) \\ & \quad = p^s\, e_{r-s}(-a_1' b_1^2)\, G_{r-s}(a_1), \end{aligned}$$

which completes the proof of (2.5).

Lemma 4. *Put*

(2.6) $$K_r(a, b) = \sum_{\substack{x \pmod{p^r} \\ p \nmid x}} e_r(a x + b x') = K_r(b, a),$$

where $x\, x' \equiv 1 \pmod{p^r}$. *Then for* $r \geq 2$

(2.7) $$K_r(a, b) = 0. \qquad (p \| a, p \nmid b),$$

(2.8) $$K_r(p^s a, p^s b) = p^s\, K_{r-s}(a, b) \qquad (s < r).$$

If $r \geq 2$ *and* $(a\, b/p) = -1$, *then* $K_r(a, b) = 0$, *while for* $(a\, b/p) = 1$.

(2.9) $$K_r(a, b) = \begin{cases} 2 G_r(a) \cos \dfrac{4 \pi k}{p^r} & (p^r \equiv 1 \pmod 4) \\ -2 G_r(a) \sin \dfrac{4 \pi k}{p^r} & (p^r \equiv 3 \pmod 4), \end{cases}$$

where $a\, b \equiv k^2 \pmod{p^r}$.

For proof of Lemma 4, see [3, § 2].

We remark that

(2.7)′ $$K_1(a, b) = -1 \quad (p \| a, p \nmid b)$$

(2.8)′ $$K_1(p\, a, p\, b) = p - 1.$$

Lemma 5. *Let* $r \geqq 1$. *Put*

$$L_r(a,b) = \sum_{\substack{x \pmod{p^r} \\ p \nmid x}} \left(\frac{x}{p^r}\right) e_r(a\,x + b\,x') = L_r(b,a), \tag{2.10}$$

where $x\,x' \equiv 1 \pmod{p^r}$. *Then in the first place*

$$L_r(a,b) = K_r(a,b) \qquad (r \text{ even}); \tag{2.11}$$

if r *is odd and* $p \nmid a\,b$, *we have*

$$L_r(a,b) = 0 \qquad \left(\left(\frac{a\,b}{p}\right) = -1\right), \tag{2.12}$$

$$L_r(a,b) = 2\left(\frac{a}{p}\right) G(1) \cos\frac{4\pi k}{p^r} \qquad \left(\left(\frac{a\,b}{p}\right) = +1\right), \tag{2.13}$$

where $a\,b \equiv k^2 \pmod{p^r}$.

To prove (2.12) and (2.13) we take

$$\sum_{u \pmod{p^r}} e_r(-x\,u^2 + 2u) = e_r(x')\,G_r(-x) = G_r(-1)\left(\frac{x}{p^r}\right) e_r(x'),$$

$$G_r(-1) \sum_x \left(\frac{x}{p^r}\right) e_r(a\,x + x') = \sum_u \sum_x e_r\big(x(a - u^2) + 2u\big);$$

summing on the right side first with respect to x, we get

$$G_r(-1)\,L_r(a,1) = \begin{cases} 0 & ((a/p) = -1) \\ 2p^r \cos\dfrac{4\pi k}{p^r} & (a \equiv k^2 \pmod{p^r}). \end{cases} \tag{2.14}$$

Since (2.10) implies

$$L_r(a,b) = \left(\frac{b}{p^r}\right) L_r(a\,b,1) \qquad (p \nmid b), \tag{2.15}$$

it is clear that (2.14) yields (2.12) and (2.13).

The proof of $L_r(a,b) = L_r(b,a)$ follows from the first of (2.10) on replacing x by x'.

Lemma 6. *For* $r \geqq 2$,

$$L_r(a,b) = 0 \quad (p \mid a,\ p \nmid b), \tag{2.16}$$

$$L_r(p^s a, p^s b) = p^s\,L_{r-s}(a,b) \quad (s < r). \tag{2.17}$$

The proof of this lemma is similar to the proof of (2.7) and (2.8). In the summation in (2.10) put $x = y\,p^{r-1} + z$, so that $x' \equiv -y\,p^{r-1} + z' \pmod{p^r}$, where $z\,z' \equiv 1 \pmod{p^{r-1}}$. Then

$$L_r(a,b) = \sum_{\substack{z \pmod{p^{r-1}} \\ p \nmid z}} e_r(a\,z + b\,z') \sum_{y \pmod{p}} e_1(-b\,y); \tag{2.18}$$

since the inner sum in the right member vanishes for $p \nmid b$, it is clear that (2.16) holds. In the next place if $p \mid a$, $p \mid b$ then (2.18) yields

$$L_r(a,b) = p \sum_{\substack{z \pmod{p^{r-1}} \\ p \nmid z}} e_r(a\,z + b\,z') = p\,L_{r-1}\left(\frac{a}{p}, \frac{b}{p}\right).$$

Repeated application of this formula gives (2.17).

Finally in the case $r=1$, we have

Lemma 7.

$$L_1(a,b)=0 \qquad (p|a,\ p|b), \tag{2.19}$$

$$L_1(a,b)=G_1(a) \qquad (p\nmid a,\ p|b). \tag{2.20}$$

Clearly (2.19) and (2.20) are immediate consequences of (2.10). The case $p\nmid a\ b$ is already covered by Lemma 5.

3. Transformation of the sum S. By Lemma 1 we have

$$p^r S=\sum_u \sum_{x_1,\ldots,x_t} e_r\left\{u\left(\sum_{i=1}^{t} a_i x_i^2-c\right)+2\sum_{i=1}^{t}\lambda_i x_i\right\}$$

$$=\sum_u e_r(-cu)\prod_{i=1}^{t}\sum_x e_r(u a_i x^2-2\lambda_i x),$$

where u, x, x_i range over complete residue systems (mod p^r). Using the first half of (2.5) this becomes

$$p^r S=\sum_u e_r(-cu)\prod_{i=1}^{t} S_r(u a_i,\lambda_i). \tag{3.1}$$

Now let p^{l_i} denote the highest power of p dividing λ_i, and put $l=\min(\lambda_1,\ldots,\lambda_t)$. Then by Lemma 3 it is clear that we need only consider those terms in the right member of (3.1) for which u is divisible by at most p^l. We accordingly write (3.1) in the following form:

$$p^r S=\sum_{s=0}^{l} T_s, \tag{3.2}$$

where

$$T_s=\sum_u{}' e_r(-cu)\prod_{j=1}^{t} S_r(u a_i,\lambda_i), \tag{3.3}$$

and the summation in (3.3) is over all u (mod p^r) such that $p^s|u$, $p^{s+1}\nmid u$. Put $u=p^s v$, so that for fixed s, v runs through a reduced residue system (mod p^{r-s}); also let $v\,v'\equiv 1-a_i a_i'$ (mod p^{r-s}). Similarly put $\lambda_i=p^s\mu_i$. Thus by (2.5) we have

$$S_r(u a_i,\lambda_i)=p^s e_{r-s}(-a_i' v'\mu_i^2)\,G_{r-s}(a_i v),$$

so that by (2.3)

$$\prod_{i=1}^{t} S_r(u a_i,\lambda_i)=p^{st} e_{r-s}(-\omega v')\prod_{i=1}^{t} G_{r-s}(a_i v)$$

$$=p^{st} e_{r-s}(-\omega v')\left(\frac{\delta}{p}\right)^{r-s}\left(\frac{v}{p}\right)^{(r-s)t} G_{r-s}^t(1),$$

where for brevity we put

$$\omega=\sum_{i=1}^{t} a_i'\mu_i^2, \qquad \delta=\prod_{i=1}^{t} a_i. \tag{3.4}$$

Thus (3.3) yields

$$T_s = p^{st}\left(\frac{\delta}{p}\right)^{r-s} G_{r-s}^t(1) \sum_{\substack{v \pmod{p^{r-s}} \\ p \nmid s}} \left(\frac{v}{p}\right)^{(r-s)t} e_{r-s}(-cv - \omega v'). \tag{3.5}$$

Next using (2.6) and (2.10) we see that (3.5) becomes

$$T_s = \begin{cases} p^{st}\left(\frac{\delta}{p}\right)^{r-s} G_{r-s}^t(1)\, K_{r-s}(c,\omega) & ((r-s)\,t \text{ even}) \\ p^{st}\left(\frac{\delta}{p}\right)^{r-s} G_{r-s}^t(-1)\, L_{r-s}(c,\omega) & ((r-s)\,t \text{ odd}). \end{cases} \tag{3.6}$$

Thus by means of (3.2) and (3.6) we have expressed S in terms of $K\,K_s(c,\omega)$ and $L_s(c,\omega)$; also the G factors can be explicitly evaluated by means of Lemma 2.

4. The main result. To further simplify (3.6) we assume that

$$p \nmid (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_t); \tag{4.1}$$

in other words, in the previous notation, $l = 0$. Hence (3.2) reduces to simply

$$S = p^{-r} T_0, \tag{4.2}$$

where now

$$T_0 = \begin{cases} \left(\frac{\delta}{p}\right)^r G_r^t(1)\, K_r(c,\omega) & (rt \text{ even}) \\ \left(\frac{\delta}{p}\right)^r G_r^t(-1)\, L_r(c,\omega) & (rt \text{ odd}) \end{cases} \tag{4.3}$$

and ω is determined by

$$\omega = \sum_{i=1}^{t} a_i' \lambda_i^2, \qquad a_i a_i' \equiv 1 \pmod{p^r}; \tag{4.4}$$

δ as before is determined by the second of (3.4).

If we suppose that rt is even and apply Lemma 4, we see first that

$$S = \left(\frac{\delta}{p}\right)^r \left(\frac{-1}{p}\right)^{\frac{1}{2}rt} p^{\frac{1}{2}rt-1}(p-1) \qquad (c \equiv 0 \equiv \omega \pmod{p^r}). \tag{4.5}$$

Secondly if p^s is the highest power of p dividing c and p^w is the highest power dividing ω, where $s < r$, $w < r$, then $S = 0$ unless $s = w$. When $s = w$, then by (2.8) we get

$$T_0 = \left(\frac{\delta}{p}\right)^r G_r^t(1)\, p^s K_{r-s}\left(\frac{c}{p^s}, \frac{\omega}{p^s}\right),$$

where now neither $c\,p^{-s}$ nor $\omega\,p^{-s}$ is divisible by p. There are then two possibilities according as $r - s = 1$ or $r - s \geqq 1$. In the first case we have

$$S = \left(\frac{\delta}{p}\right)^r \left(\frac{-1}{p}\right)^{\frac{1}{2}rt} p^{\frac{1}{2}rt-1} K_1\left(\frac{c}{p^{r-1}}, \frac{\omega}{p^{r-1}}\right) \quad (s = r-1), \tag{4.6}$$

but in the second case we apply (2.9) to get

$$S = 2\left(\frac{\delta}{p}\right)^r \left(\frac{-1}{p}\right)^{\frac{1}{2}rt} p^{\frac{1}{2}rt-r+s} \cos\left(\frac{4\pi k}{p^{r-s}} + \frac{1}{8}(p^{r-s}-1)^2\pi\right) \quad (s < r-1). \tag{4.7}$$

There still remains the possibility $c \equiv 0$ or $\omega \equiv 0 \pmod{p^r}$. Now if $c \equiv 0 \pmod{p^r}$ but $\omega \not\equiv 0 \pmod{p^{r-1}}$ or $\omega \equiv 0 \pmod{p^r}$ but $c \not\equiv 0 \pmod{p^{r-1}}$ then it follows from (2.7) and (2.8) that $S = 0$. The only remaining case is covered by

$$S = -\left(\frac{\delta}{p}\right)^r \left(\frac{-1}{p}\right)^{\frac{1}{2}rt} p^{\frac{1}{2}rt-1} \tag{4.8}$$

which follows from (2.7)'; (4.8) holds when one of c, ω is divisible by p^r but the other by only p^{r-1}.

Turning now to the case rt odd we apply the second half of (4.3). Again there are several cases to consider. In the first place

$$S = 0 \qquad (c \equiv 0 \equiv \omega \pmod{p^r}). \tag{4.9}$$

Also if as above p^s is the highest power of p dividing c and p^w the highest power dividing ω, where $s < r$, $w < r$, then by Lemma 6, $S = 0$ unless $s = w$. When $s = w$ we apply (2.17) to get

$$T_0 = \left(\frac{\delta}{p}\right) G_r^t(-1)\, p^s L_{r-s}\left(\frac{c}{p^s}, \frac{\omega}{p^s}\right).$$

Since Lemma 5 holds for all $r \geq 1$, we use (2.9), (2.12), (2.13) to get after a little manipulation the following result.

$$S = \begin{cases} 0 & \left(\left(\frac{c\omega p^{-2s}}{p}\right) = -1\right) \\ 2\left(\frac{-\delta}{p}\right)\left(\frac{cp^{-s}}{p}\right)^{r-s} G_r^t(1)\, G_{r-s}(1) \cos\frac{4\pi k}{p^{r-s}} & \left(c\omega p^{-2s} \equiv k^2 \pmod{p^{r-s}}\right). \end{cases} \tag{4.10}$$

The case $c \equiv 0$ or $\omega \equiv 0 \pmod{p^r}$ still remains. We now find, using (2.16) and (2.19), that

$$S = 0 \quad \left(c \equiv 0 \quad \text{or} \quad \omega \equiv 0 \pmod{p^r}\right); \tag{4.11}$$

we have stated (4.11) so that (4.9) is included.

The results of this section may be summed up in the following

Theorem. *Let the λ's satisfy* (4.1). *If rt is even then S is determined by* (4.5), (4.6), (4.7), (4.8). *If rt is odd then S is determined by* (4.10) *and* (4.11).

It is easily verified that (1.3) and (1.4) are included in this theorem.

5. A generalization. (Compare [*1*, § 5].) The above results can be stated in a more general manner if in place of (1.1) we consider

$$S(c, \lambda, Q) = \sum_{Q(x)=c} e_r(2\lambda_1 x_1 + \cdots + 2\lambda_t x_t), \tag{5.1}$$

where Q denotes a quadratic form

$$Q(u) = \sum_{i,j=1}^{t} a_{ij} u_i u_j \qquad (\delta = |a_{ij}|) \tag{5.2}$$

of discriminant δ. If we assume $p \nmid \delta$, then by a linear transformation with determinant d prime to p, the quadratic form can be reduced to diagonal

form $\sum \alpha_i u_i^2$, where $\prod \alpha_i = \delta d^2$. Also the number ω is determined by means of

$$\omega = Q'(\lambda_1, \ldots, \lambda_t), \tag{5.3}$$

where $Q'(u)$ denotes the quadratic form inverse to $Q(u)$. Since the results of the present paper are stated in terms of δ and ω and the condition (4.1) for example is unchanged by linear transformations of determinant prime to p, it follows that all the results of §§ 3, 4 can be carried over to the general case. We shall not take the space to restate these results.

In the next place, with the notation of (5.2) and (5.3), define $\lambda_1', \ldots, \lambda'$ by means of

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^{t} a_{ij} \lambda_j' \quad (i = 1, \ldots, t). \tag{5.4}$$

Then we have

$$Q(\lambda') = Q'(\lambda). \tag{5.5}$$

Now exactly as in (3.1)

$$p^r S(c, \lambda, Q) = \sum_u \sum_{x_1, \ldots, x_t} e\left\{-cu + uQ(x) + 2\sum_1^t \lambda_i x_i\right\}.$$

If the x_i are subjected to the transformation

$$x_i = \sum_{j=1}^{t} a_{ij} x_j' \quad (i = 1, \ldots, t),$$

then clearly the x_i' range independently over complete residue systems (mod p^r). Thus using (5.4) and (5.5) we get

$$\begin{aligned} p^r S(c, \lambda, Q) &= \sum_u \sum_{x_1', \ldots, x_t'} e\left\{-cu + uQ(x') + 2\sum_1^t \lambda_i x_i'\right\} \\ &= \sum_u \sum_{x_1, \ldots, x_t} e\left\{-cu + Q'(x) + 2\sum_1^t \lambda_i' x_i\right\}. \end{aligned}$$

We have therefore the following reciprocity formula

$$S(c, \lambda, Q) = S(c, \lambda', Q'). \tag{5.6}$$

Note that (5.6) holds for all λ_i.

References.

[1] CARLITZ, L.: Weighted quadratic partitions over a finite field. Canad. J. Math., vol. 5 (1953). — [2] LANDAU, E.: Vorlesungen über Zahlentheorie. Leipzig 1927. — [3] SALIÉ, H.: Über die KLOOSTERMANSchen Summen $S(u, v, q)$. Math. Z. **34**, 91—109 (1932).

Dept. of Math., Duke University, Durham N.C. (USA.).

(Eingegangen am 16. März 1953.)

Vang, H.
Iath. Zeitschr. Bd. 59, S. 47—56 (1953)

The categoricity question of certain grand logics.

By
HAO WANG.

The search for a convenient and comprehensive formal logic in which we an develop all ordinary mathematics has led to several interesting axiom ystems for set theory. With regard to these grand logics many questions, ncluding that of consistency, remain open and are apparently difficult.

The purpose of this paper is to do the following for a special grand logic S. Within the system S a denumerable model for S itself is obtained and it is proved that we can add, without contradiction, an additional axiom by which he objects of the system are limited to that denumerable domain. The new axiom seems to make the system categorical in a certain (rather weak) sense.

The result seems of interest because it is probably the first of its kind if ve do not use transfinite ordinals. It is not clear whether similar results lso hold for other familiar systems of grand logics.

The system S we use is an extension of what is known as QUINE's *New Foundations* (see [1]), based on his idea of *stratification* originally obtained hrough an analysis of the simple theory of types. It is known that the axioms of QUINE's system can be reduced to a finite number (see [2]). Since we would want to include the axiom of infinity and the axiom of choice in a grand logic and it is not clear that either is derivable in this system, we consider the extension S of it obtained by adding these two special axioms and prove that there is a sentence $E(x, m)$ of S such that the sentence $(x)(\exists m) E(x, m)$ is consistent with the axioms of S. This, when taken as an axiom, may also be considered an axiom of limitation (cf. [3], p. 355). We shall also prove incidentally that there is a certain class of natural numbers which is expressible in S but cannot be proved to exists by the axioms of S.

Let us recall briefly the notations and principles of *New Foundations*. We need, besides the variables $x, y, z, u, v, w, r, f, g, h$, etc. (all of the same kind), only three primitive notions: membership, expressed by the sign $\in$; *alternative denial*, expressed by the sign $|$; and *general quantification*, expressed by prefixing a variable enclosed in parentheses. From these notions, we can define as usual the notions of conjunction (expressed by &), denial ($\sim$), alternation ($\vee$), implication ($\supset$), equivalence ($=$), and particular quantification [expressed by prefixing $(\exists x)$, $(\exists y)$, etc.]. The system includes all the axioms and rules of inference of the lower predicate calculus or quantification theory. (We assume quantification theory developed in QUINE's book [4] which contains infinitely many axioms and the single rule of inference of *modus ponens*). We are of course chiefly interested in the remaining axioms, which are concerned with the special properties of $\in$. These are

given in one axiom and one axiom schema [where $(x = y)$ stands for (z) $(z \in x \equiv z \in y)$]:

A 1. $x = y \supset (x \in w \supset y \in w)$.

As 1. If $F(x)$ does not contain the variable y and is stratified (i.e., it is possible to put numerals for its variables, the same numeral for all occurrences of the same variable in such a way that $\in$ comes to be flanked always by consecutive ascending numerals), then $(\exists y)(x)(x \in y \equiv F(x))$.

Since there are infinitely many sentences $F(x)$ which satisfy the condition of As 1, As 1 includes infinitely many axioms as special cases. HAILPERIN has succeeded ([2]) in giving an equivalent formulation of the system which contains, in place of As 1, only nine special consequences of it. For our purpose, we need not exhibit these nine axioms. We shall merely refer to them as A 2—A 10 and make use of the fact that it is possible so to reformulate the system as to need ten specific stratified (as they are) sentences A 1—A 10 as the only axioms beyond quantification theory.

To develop this system, we introduce various definitions in the usual manner. (Cf. QUINE [1] and [4].) First, we introduce *descriptions*. Given a condition $F(x)$ satisfied by just one object x, the description $(\iota x) F(x)$ is meant to denote that object. A description $(\iota x) F(x)$ is introduced only as part of contexts which are defined as wholes.

1.1 $y \in (\iota x) F(x)$ for $(\exists z)(y \in z \ \& \ (x)(x = z \equiv F(x)))$.

Let a and b each be either a variable or a description.

1.2 $a = b$ for $(x)(x \in a \equiv x \in b)$.

1.3 $(\iota x) F(x) \in a$ for $(\exists y)(y = (\iota x) F(x) \ \& \ y \in a)$.

The next notion to be introduced is the operation of *abstraction*, whereby, given a condition $F(x)$ upon x, we form the class $\hat{x} F(x)$ whose members are just those objects x which satisfy the condition.

1.4 $\hat{x} F(x)$ for $(\iota y)(x)(x \in y \equiv F(x))$.

1.5 $a \subset b$ for $(x)(x \in a \supset x \in b)$.

1.6 $a - b$ for $\hat{x}(x \in a \ \& \ \sim x \in b)$.

1.7 $\{a\}$ for $\hat{x}(x = a)$.

1.8 $a \cup b$ for $\hat{x}(x \in a \vee x \in b)$.

1.9 V for $\hat{x}(x = x)$.

1.10 Λ for $\hat{x}(\sim x = x)$.

1.11 $\iota^{-1}(a)$ for $(\iota x)(\{x\} = a)$.

For our considerations later on, it is important that we define the ordered pair of two classes a and b (of the same type) to have the same type as a and b (i.e., we do not have to assign a different numeral to the ordered pair). A definition especially suitable for our purpose is QUINE's (see [5]).

2.1 0 for $\{\Lambda\}$.

2.2 Sv for $\hat{x}(\exists y)(y \in x \ \& \ x - \{y\} \in v)$.

.3 Nn for $\hat{z}(x)\,\big((0 \in x \,\&\, (y)\,(y \in x \supset Sy \in x)) \supset z \in x\big)$.

.4 $(m)\,F(m)$ for $(x)\,\big(x \in Nn \supset F(x)\big)$, etc.

.5 $(\exists m)\,F(m)$ for $(\exists x)\,\big(x \in Nn \,\&\, F(x)\big)$, etc.

.6 $\hat{m}F(m)$ for $\hat{x}\,\big(x \in Nn \,\&\, F(x)\big)$, etc.

.7 θz for $\hat{u}\,(\exists v)\,\big(v \in z \,\&\, ((\sim v \in Nn \,\&\, u = v) \vee (v \in Nn \,\&\, u = Sv))\big)$.

.8 $a; b$ for $\hat{w}\,(\exists z)\,\big((z \in a \,\&\, w = \theta z) \vee (z \in b \,\&\, w = \theta z \vee \{0\})\big)$.

Notions about relations and functions can then be introduced[1]).

.1 $\hat{x}\,\hat{y}\,F(x, y)$ for $\hat{z}\,(\exists x)\,(\exists y)\,\big(z = x; y \,\&\, F(x, y)\big)$.

.2 $\mathrm{Rel}\,(x)$ for $(z)\,\big(z \in x \supset (\exists u)\,(\exists v)\,(z = u; v)\big)$.

.3 $Fcn\,(x)$ for $\mathrm{Rel}\,(x) \,\&\, (u)\,(v)\,(w)\,\big((v; u \in x \,\&\, w; u \in x) \supset v = w\big)$.

.4 $D(x)$ for $\hat{y}\,(\exists z)\,(z; y \in x)$.

.5 $W(x)$ for $\hat{y}\,(\exists z)\,(y; z \in x)$.

.6 $f(y)$ for $(\imath z)\,(z; y \in f)$.

.7 $\vec{r}\,(y)$ for $\hat{x}\,(x; y \in r)$.

Let S be the system obtained from *New Foundations* (with the axioms A 1—A 10) by adding the following two axioms.

A 11. Axiom of infinity. $\sim \Lambda \in Nn$.

A 12. Axiom of choice. $(x)\,\big(\mathrm{Rel}\,(x) \supset (\exists w)\,(Fcn\,(w) \,\&\, w \subset x \,\&\, D(w) = D(x))\big)$.

Since *New Foundations* is obtained from the simple theory of types by relaxing restrictions, it is easy to convince ourselves that S is at least as strong as the simple theory of types. Therefore, we can derive in S the ordinary arithmetic of natural numbers in some traditional way. In particular, we can define addition $(m+n)$, multiplication $(m \cdot n)$, power (m^n), smaller than $(m<n)$, so that the ordinary laws hold for them. The following principle of induction holds on account of A 2—A 10 (which replace As 1) and the definition 2.3 of Nn.

.1 If $F(x)$ is stratified, then $\big(F(0) \,\&\, (m)\,(F(m) \supset F(Sm))\big) \supset (n)\,F(n)$.

The following definitions will be used later on.

.2 $\begin{cases} \max(m, n) & \text{for } (\imath k)\,\big((m < n \,\&\, k = n) \vee (n < m \,\&\, k = m) \vee \\ & \quad \vee (m = n \,\&\, k = n)\big). \end{cases}$

.3 $\begin{cases} \langle m, n\rangle & \text{for } 2^m 3^n. \\ \langle m, n, k\rangle & \text{for } \langle m, \langle n, k\rangle\rangle. \end{cases}$

[1]) As a matter of fact, the definition 3.2 and the clause $\mathrm{Rel}\,(x)$ occurring in 3.3 and 12 are all superfluous, because QUINE has shown (in [7]) that every class is according to 2.8 an ordered pair so that every class is a relation. However, we retain these to remind ourselves that at these places we are interested in classes as relation.

$$4.4\quad \begin{cases} Pr(\langle m,q,k\rangle, \langle i,j,p\rangle) \text{ for } m,i<4 \,\&\, \big((q=j \,\&\, k=p \,\&\, m<i) \vee \\ \qquad \vee \max(q,k) < \max(j,p) \vee (\max(q,k)=\max(j,p) \,\&\, k<p) \vee \\ \qquad \vee (\max(q,k)=\max(j,p) \,\&\, k=p \,\&\, q<j)\big). \end{cases}$$

In other words, we can define in S an ordering relation Pr for all the ordered triples of natural numbers with the first term smaller than 4. Then we can correlate these ordered triples with natural numbers by defining in S a function J such that[2]):

$$4.5\quad \begin{cases} J(0)=\langle 0,0,0\rangle; \\ J(Sm)=(\imath m')(\exists n)(\exists q)(\exists k)\big(n<4 \,\&\, m'=\langle n,q,k\rangle \,\&\, (i)(j)(p) \\ (Pr(J(m),\langle i,j,p\rangle) \equiv (\langle n,q,k\rangle=\langle i,j,p\rangle \vee Pr(\langle n,q,k\rangle,\langle i,j,p\rangle)))\big). \end{cases}$$

Next we define in S three functions K_i $(i=1,2,3)$ such that $K_i(n)$ gives the i-th member of the triple $J(n)$.

$$4.6\quad \begin{cases} K_1(n) \quad \text{for} \quad (\imath m)(\exists k)(\exists j)\big(J(n)=\langle m,k,j\rangle\big). \\ K_2(n) \quad \text{for} \quad (\imath k)(\exists m)(\exists j)\big(J(n)=\langle m,k,j\rangle\big). \\ K_3(n) \quad \text{for} \quad (\imath j)(\exists m)(\exists k)\big(J(n)=\langle m,k,j\rangle\big). \end{cases}$$

Since S contains only twelve special axioms, we can write out the conjunction of the closures of these axioms (the closure of an axiom is the result obtained from it by adding at the beginning the general quantifiers for all the free variables in it), and bring the result into an equivalent prenex normal form

$$(1)\quad \begin{cases} (x)\ldots(y)(\exists z)\ldots(\exists w)(u)\ldots(v)(\exists t)\ldots(\exists s)\ldots \\ \qquad \ldots U(x,\ldots,y,z,\ldots w,u,\ldots,v,t,\ldots,s,\ldots,\in,|), \end{cases}$$

in such a way that no quantifiers occur in U and at least one general quantifier occurs at the beginning (see, e.g., CHURCH [6], p. 60 and p. 84). Therefore, (1) is consistent (or, in other words, not refutable in quantification theory) if and only if S is consistent; every model of (1) is also one of S and vice versa. In short, instead of S, we need only consider the special sentence (1) expressed in the notation of S.

---

[2]) If we use $f_1(j(m))$ as an abbreviation of the right-hand side of the second line of 4.5, we see more clearly the form of 4.5:

$$4.5\quad \begin{cases} J(0)=\langle 0,0,0\rangle; \\ J(Sm)=f_1(J(m)). \end{cases}$$

In order to prove 4.5, we give an explicit definition of the function J:

$$6.1\quad \begin{cases} J \quad \text{for} \quad \hat{j}\,\hat{n}(\exists r)\big(j; n\in r \,\&\, (m)((\exists x)\,x; m\in r \equiv m\leq n)\big) \,\& \\ \qquad (k)\big(k\leq n > \big((k=0 \,\&\, r(k)=\langle 0,0,0\rangle) \vee (\exists i)(k=Si \,\&\, r(k)=f_1(r(i)))\big)\big) \end{cases}$$

Or, using FREGE's idea:

$$6.1'\quad J \quad \text{for} \quad \hat{y}(r)\big(\{0;\langle 0,0,0\rangle\in r \,\&\, (m)(x)(m; x\in r > Sm; f_1(J(m))\in r)\big) > y\in r\big).$$

Then we can derive 4.5 from 6.1 or 6.1′ in known manner (compare, for example, BERNAYS [8], p. 12). Indeed, all the recursive functions such as addition, multiplication, power, etc. can be treated similarly.

To simplify our considerations, we assume that the sentence (1) is merely this:

(2) $(x)\,(\exists\, y)\,(z)\,(\exists\, u)\,(\exists\, v)\,(w)\,H(x, y, z, u, v, w, \in, |)$,

where H contains no quantifiers. Of course (1) is actually more complex than (2), but it will be clear that exactly analogous considerations are involved in both cases. So let us confine our attention to (2).

Because the axioms of S are all stratified, it is easy to see that (1) can be assumed to be stratified. Hence, we can also assume that (2) and H are stratified. Let us suppose that one correct way of assigning integers to the variables is to associate 1, 3, 2, 2, 1, 1 respectively with x, y, z, u, v, w.

Consider the relation $R = \hat{y}\,\hat{x}'(\exists\, x)\,(x' = \{\{x\}\}\ \&\ (z)\,(\exists\, u)\,(\exists\, v)\,(w)\,H)$, whose domain is by (2) the class $\hat{x}'(\exists\, x)\,(x = \{\{x\}\})$. By the axiom of choice A 12, there is a function f which is included in R and has the same domain $D(f)$ as $D(R)$. Hence, by (2), we can prove in S that there exists a function f such that:

(2a) $(x)\,(z)\,(\exists\, u)\,(\exists\, v)\,(w)\,H(x, f(\{\{x\}\}), z, u, v, w, \in, |)$.

Next consider $R' = \hat{u}\,\hat{y}'(\exists\, x)\,(\exists\, z)\,(y' = \{x\};\ z\ \&\ (\exists\, v)\,(w)\,H)$. By A 12 and (2a), we have a function g such that:

(2b) $(x)\,(z)\,(\exists\, v)\,(w)\,H(x, f(\{\{x\}\}), z, g(\{x\}; z), v, w, \in, |)$.

Similarly, we can consider the relation $R'' = \hat{v}'\,\hat{z}'(\exists\, x)\,(\exists\, z)\,(\exists\, v)\,(z' = \{x\};\ z\ \&\ v' = \{v\}\ \&\ (w)\,H)$, and prove in S that there exists a function h:

(3) $(x)\,(z)\,(w)\,H(x, f(\{\{x\}\}), z, g(\{x\}; z), \iota^{-1}(h(\{x\}; z)), w, \in, |)$.

If S is consistent (i.e., contains no contradictory theorems), then, by the completeness of quantification theory, there exists a model $M(D, I_\in)$ for (2). In other words, there is a non-empty domain D such that by giving suitable truth values to $\alpha \in \beta$ for all pairs of members α and β of D and taking D as the universal class, (2) comes out true under the ordinary interpretation of truth functions and quantifiers.

There is an object in D corresponding to (say) the class 0 (viz., $\{\Lambda\}$) of S. Let us denote it by 0*. There is also an object f^* in D corresponding to the function f, an object $f(\{\{0\}\})^*$ corresponding to $f(\{\{0\}\})$, etc. Consider the subdomain D' of D which consists of exactly those objects of D that correspond to the following classes of S [3]: 0, $f(\{\{0\}\})$, $g(\{0\}; 0)$, $\iota^{-1}(h(\{0\}; 0))$, $f(\{\{f(\{\{0\}\})\}\})$, $f(\{\{g(\{0\}; 0)\}\})$, $g(\{0\}; f(\{\{0\}\}))$, etc., where all and only the results obtained by substituting in an arbitrary manner given members of the sequence for all the arguments in $f(\{\{x\}\})$, $g(\{x\}; z)$, or $\iota^{-1}(h(\{x\}; z))$,

[3] Note incidentally that terms such as $\{0\}; 0, \{0\}; f(\{\{0\}\})$, etc. are all stratified because the variables in 0, $\{0\}$, $\{\{0\}\}$, etc., being bound and thus independent of outside variables, may receive any assignments of integers which fulfill the stratification requirements for the sentences inside the terms.

occur in the sequence. Then the original interpretation of $\in$ with the domain restricted to D' again determines a model $M(D', I_\in)$ for (2) and therefore also one for S. This can be seen from the way the members of D' are chosen (cf. SKOLEM [9], p. 26).

Thus, since (3), being a theorem of S, is by hypothesis true in the model $M(D, I_\in)$, it remains true if we restrict the range of the values which the variables x, z, w can take to the members of the domain D'. Moreover, by the definition of D', for each pair of members of D' corresponding to two classes x and z of S, there is a member of D' corresponding to $\iota^{-1}(h(\{x\}; z))$. Therefore, (2b) is also true when we restrict the range of the values which the variables x, z, v, w can take to the members of the domain D'. Similarly, (2a) is also true when we restrict the range of the variables x, z, u, v, w, to D', because for any x and z which correspond to members of D', there is a member of D' corresponding to $g(\{x\}; z)$. Finally, since $f(\{\{x\}\})$ corresponds to a member of D' if x does, (2) is also true when we restrict the range of values of the variables x, y, z, u, v, w to D'; in other words, (2) is true in $M(D', I_\in)$ [i.e., (2) is true if we retain the interpretation of $\in$ as in $M(D, I_\in)$ but restrict the domain of objects in the model to D' [4])].

We proceed to give in S an enumeration of the classes in S which correspond to members of D'.

In order to exhibit the enumeration of all these classes of S which correspond to members of D', we assume first the ordering of the ordered triples $\langle k, m, n\rangle$ $(k<4)$ of natural numbers as given by the function J introduced in 4.5, according to which $J(0)$ is $\langle 0, 0, 0\rangle$ and for positive j, if $J(j)$ is $\langle k, m, n\rangle$ then $j > k$, $j > m$, and $j > n$. Then we correlate these triples with the classes of S to be enumerated, in the following manner: for any m and n, an ordered triple $\langle 0, m, n\rangle$ is correlated with the class 0 of S; for any n, an ordered triple $\langle 1, m, n\rangle$ is correlated with the class $f(\{\{x\}\})$ if x is correlated with the m-th $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ ordered triple in the ordering determined by J; a triple $\langle 2, m, n\rangle$ is correlated with the class $g(\{x\}; z)$ where x and z are respectively correlated with the m-th and the n-th ordered triples; similarly $\langle 3, m, n\rangle$ is correlated with $\iota^{-1}(h(\{x\}; z))$ if x and z are correlated with the m-th and the n-th triples. Since each triple used above is by 4.5 correlated with a natural number, we can correlate a natural number with the class of S which is correlated with its corresponding triple; for instance, if x is correlated with the j-th triple, then the natural number j is correlated with x, and we can speak of x as the j-th $(j = 0, 1, 2, \ldots)$ in our enumeration. Clearly, in this way each class of S corresponding to a member of D' is correlated with one or more natural numbers and each natural number is correlated with a unique such class.

---

[4]) Alternatively, we can, instead of constructing $M(D', I_\in)$ as a submodel of $M(D, I_\in)$, construct directly the model $M(D', I_\in)$ by the familiar argument of proving the completeness of quantification theory. Such a proof would require a fairly complex direct determination of the relation $\in$ in D', which is avoided here by taking for granted the known fact that every consistent system has a model.

Our problem is to define in S a function which would give us the enumeration. Equivalently, it is also sufficient to define a relation e such that $y; n \in e$ if and only if y belongs to the n-th class in the enumeration thus described. Using the notions introduced in 4.6, we can phrase this problem as one of finding a relation e such that the following statements hold.

5.3. For each given numeral $\mathfrak{k}$, we can prove the following:

$$K_1(\mathfrak{k}) = 0 \supset \vec{e}(\mathfrak{k}) = 0.$$
$$K_1(\mathfrak{k}) = 1 \supset \vec{e}(\mathfrak{k}) = f(\{\{\vec{e}(K_2(\mathfrak{k}))\}\}).$$
$$K_1(\mathfrak{k}) = 2 \supset \vec{e}(\mathfrak{k}) = g(\{\vec{e}(K_2(\mathfrak{k}))\}; \vec{e}(K_3(\mathfrak{k}))).$$
$$K_1(\mathfrak{k}) = 3 \supset \vec{e}(\mathfrak{k}) = \iota^{-1}(h(\{\vec{e}(K_2(\mathfrak{k}))\}; \vec{e}(K_3(\mathfrak{k})))).$$

To find a relation e which satisfies 5.3, we define a predicate $G(n, r)$ meaning that the relation r provides an enumeration of all the classes correlated with natural numbers no greater than n:

5.1
$$\left\{\begin{array}{l} G(n,r) \quad \text{for} \quad (m)\,((\exists x)\, x; m \in r \supset m \leqq n)\ \&\ (k)\,(k \leqq n \supset ((K_1(k) = 0 \\ \qquad \&\ \vec{r}(k) = 0) \vee (K_1(k) = 1\ \&\ \vec{r}(k) = f(\{\{\vec{r}(K_2(k))\}\})) \vee \\ \qquad (K_1(k) = 2\ \&\ \vec{r}(k) = g(\{\vec{r}(K_2(k))\};\ \vec{r}(K_3(k)))) \vee (K_1(k) = 3 \\ \qquad \&\ \vec{r}(k) = \iota^{-1}(h(\{\vec{r}(K_2(k))\}; \vec{r}(K_3(k)))))). \end{array}\right.$$

Then e is, roughly, the sum of such relations r:

5.2
$$\left\{\begin{array}{l} e \quad \text{for} \quad \hat{x}\,\hat{n}\,(\exists r)\,(G(n,r)\ \&\ x; n \in r), \quad \text{or} \\ x; n \in e \equiv x \in \vec{e}(n) \equiv (\exists r)\,(G(n,r)\ \&\ x; n \in r). \end{array}\right.$$

We note incidentally that 5.2 is, strictly speaking, meant only as an abbreviational stipulation for introducing the symbol e in context. It is not uncommon to require, before legitimately introducing a name for a class or relation, that we first prove the existence of the class or relation. If we were to follow this requirement, our use of the phrase "the relation e" would be unjustified, since we do not know whether we can prove in S the existence theorem $(\exists y)\,(x)\,(n)\,(x; n \in y \equiv (\exists r)\,(G(n,r)\ \&\ x; n \in r))$, the defining condition on the right being unstratified. However, we trust that, with this explanation, our usage need not cause any serious misunderstanding. Whenever we use the abbreviation $x; n \in e$, we mean nothing but the formula involving x and n, determined by 5.1 and 5.2.

Using this relation e, we can prove the statements listed under 5.3 as theorems (or rather metatheorems) of S.

6.2. For each given numeral $\mathfrak{n}$, we can prove in S: $(\exists r)\, G(\mathfrak{n}, r)$.

Proof. Case 1. $\mathfrak{n} = 0$. By A 1 (hence also by A 1—A 10), $(\exists y)\,(x)\,(m)\,(x; m \in y \equiv (m = 0\ \&\ x \in 0))$. We can easily prove for this class y: $G(0, y)$.

Case 2. Assume there exists a class z such that $G(\mathfrak{j}, z)$. By As 1 (for the question of stratification, compare footnote 3 above), $(\exists w)(x)(m)(x; m \in w \equiv)(m \leqq \mathfrak{j} \;\&\; x; m \in z) \vee (m = S\,\mathfrak{j} \;\&\; ((K_1(S\,\mathfrak{j}) = 0 \;\&\; x \in 0) \vee (K_1(S\,\mathfrak{j}) = 1 \;\&\; x \in f(\{\vec{z}(K_2(S\,\mathfrak{j}))\})) \vee (K_1(S\,\mathfrak{j}) = 2 \;\&\; x \in g(\{\vec{z}(K_2(S\,\mathfrak{j}))\}; \vec{z}(K_3(S\,\mathfrak{j})))) \vee (K_1(S\,\mathfrak{j}) = 3 \;\&\; x \in \iota^{-1}(h(\{\vec{z}(K_2(S\,\mathfrak{j}))\}; \vec{z}(K_3(S\,\mathfrak{j}))))))$. We can prove for this class w: $G(S\,\mathfrak{j}, w)$.

6.3. For each given numeral $\mathfrak{n}$, we can prove in S: If $(G(\mathfrak{n}, r) \;\&\; G(\mathfrak{n}, u))$, then $(x)(m)(x; m \in r \equiv x; m \in u)$.

Proof. When $\mathfrak{n}$ is 0, this is immediate by 5.1. Assume 6.3 true for $\mathfrak{n} = \mathfrak{j}$. But if $G(S\,\mathfrak{j}, r) \;\&\; G(S\,\mathfrak{j}, u)$, then $G(\mathfrak{j}, r) \;\&\; G(\mathfrak{j}, u)$. Hence, if $G(S\,\mathfrak{j}, r) \;\&\; G(S\,\mathfrak{j}, u)$, then $(x)(m)(m \leqq \mathfrak{j} \supset (x; m \in r \equiv x; m \in u))$. But we can prove: $K_2(S\,\mathfrak{j}) \leqq \mathfrak{j}$, $K_3(S\,\mathfrak{j}) \leqq \mathfrak{j}$. Therefore, $(x)(x; S\,\mathfrak{j} \in r \equiv x; S\,\mathfrak{j} \in u)$. Hence, by 5.1, $(x)(m)(x; m \in r \equiv x; m \in u)$.

Now we are ready to prove 5.3.

Proof of 5.3. By 6.3 and 5.2, if $G(\mathfrak{k}, u)$, then $(x)(x \in \vec{e}(\mathfrak{k}) \equiv x \in \vec{u}(\mathfrak{k}))$. Assume $K_1(\mathfrak{k}) = 0$. Then, by 5.1, if $G(\mathfrak{k}, u)$, $\vec{u}(\mathfrak{k}) = 0$. Therefore, by 6.2, the first case of 5.3 is proved. Assume $K_1(\mathfrak{k}) = 1$. Then, if $G(\mathfrak{k}, u)$, $\vec{u}(\mathfrak{k}) = f(\{\{\vec{u}(K_2(\mathfrak{k}))\}\})$ by 5.1. Hence, by 6.2, the second case is proved. Similarly, the third and fourth cases of 5.3 can be proved.

In more intuitive terms we can also explain the proofs of 6.2, 6.3, and 5.3 somewhat differently. Given any collection of finitely many definite set names $a, \ldots, b$, we can so assign integers to variables that $a, \ldots, b$ all receive the same number (cf. footnote 3) and thereby prove in S the existence of a set y containing exactly $a, \ldots, b$: $x \in y \equiv (x = a \vee \ldots \vee x = b)$. But for each given numeral $\mathfrak{k}$, the pairs $0; 0$, $1; f(\{\{0\}\}), \ldots, \mathfrak{k}; c$, where c is the $\mathfrak{k}$-th set in the sequence consisting of $0, f(\{\{0\}\}), g(\{0\}; 0), \ldots$, form a collection of finitely many definite sets. Hence, for each $\mathfrak{k}$, we can, as in 6.2, find in S a set r such that $G(\mathfrak{k}, r)$. It is also easy to see, as in 6.3, that for each $\mathfrak{k}$, there is only one such set r. To prove the various cases of 5.3, we only have to find for each $\mathfrak{k}$ the set r such that $G(\mathfrak{k}, r)$ and prove that $\vec{r}(\mathfrak{k})$ is the set $\vec{e}(\mathfrak{k})$ required under the proper clause of 5.3. The latter can be expected to be provable from the way the set r is defined.

From 5.1 and 5.2, we see that $m; m \in e$ is the abbreviation of an unstratified sentence of S. Hence, we do not know whether we can prove in S the existence of a class of natural numbers m such that $m; m \in e$:

5.4 $$(\exists y)(m)(m \in y \equiv m; m \in e).$$

We proceed to prove that, if S is consistent, 5.4 is independent of the axioms of S.

For this purpose, we observe that if 5.4 is provable in S, so is obviously also the following:

(4) $$\begin{cases} (\exists y)(m)(m \in y \equiv \sim m; m \in e) & \text{or} \\ (\exists y)(m)(m \in y \equiv \sim m \in \vec{e}(m)). \end{cases}$$

ut the class y thus introduced is distinct from all the classes of S which orrespond to members of D'. Thus, for every class c that corresponds to a ember of D', there exists, on account of 5.3, a definite number $\mathfrak{m}$ (a definite ass of S) such that the sentence $c = \vec{e}(\mathfrak{m})$ is true in $M(D', I_\in)$. Assume here were a number $\mathfrak{n}$ such that the sentence $\hat{m}(\sim m; m \in e) = \vec{e}(\mathfrak{n})$ is true $M(D', I_\in)$, then the following sentence would also be true in $M(D', I_\in)$: $\in \vec{e}(\mathfrak{n}) \equiv \sim \mathfrak{n} \in \vec{e}(\mathfrak{n})$. Since the last sentence cannot be true in any model f S, it follows that the class $\hat{m}(\sim m; m \in e)$ corresponds to no member of $'$. That means (4) has the value falsehood in $M(D', I_\in)$. But a theorem of S ust be true in every model of S. Hence, neither (4) nor 5.4 is a theorem of S, nless S is inconsistent.

In other words, if $M(D', I_\in)$ is a model for (2), then every class c that an be proved to exist by the axioms of S must correspond to a member f D' and, therefore, for some $\mathfrak{m}$, $c = \vec{e}(\mathfrak{m})$ must be true in $M(D', I_\in)$. Hence, y the normal interpretation of quantifiers, $(y)(\exists n)\, y = \vec{e}(n)$ must be true $M(D', I_\in)$. But then (4) must be false in the model. Hence, neither (4) or 5.4 is a theorem of S.

Theorem I. *If S is consistent, then* 5.4 *is not provable in S; in other words, S is consistent, then the class $\hat{m}(m; m \in e)$ of natural numbers, though expressible in S, cannot be proved to exist by the axioms of S.*

This is worth remarking because, in both ZERMELO's set theory and the imple theory of types, every class of natural numbers, if expressible in the ystem, can be proved to exist. Notice that, this is different from CARNAP's esult (see [*10*], § 60d) which asserts the possibility of giving a class of natural umbers (by talking about a given system) which cannot be defined in the iven system.

Next we introduce a few definitions.

.1 $E(x, m)$ for $(y)(y \in x \equiv y; m \in e)$ or $x = \vec{e}(m)$.

.2 L for $\hat{x}(\exists m)\, E(x, m)$.

.3 $\begin{cases} (x^*)\, F(x^*) & \text{for } (x)\,(x \in L \supset F(x)), \\ (\exists x^*)\, F(x^*) & \text{for } (\exists x)\,(x \in L \,\&\, F(x)) \quad \text{etc.} \end{cases}$

Let us call the result of replacing all the variables x, y, etc. in a sentence f S by x^*, y^*, etc. the translation of the sentence (for a more detailed dis- ussion of the general notion of translation, see [*11*]).

Our previous considerations have established:

Theorem 2. *If S is consistent, then the translation of the sentence $V = L$ r $(x)(\exists m)\, E(x, m)$ is consistent with the translations of all the theorems of S; herefore, if S' is obtained from S by adding $V = L$ or $(x)(\exists m)\, E(x, m)$ as a ew axiom, then S' is consistent, provided S is.*

Clearly there are sentences which are not known to be decidable in S yet vhich can be seen to be decidable in S'. For instance, both 5.4 and (4) are lefinitely refutable in S', but presumably not in S.

References.

[1] QUINE, W. V.: New Foundations for mathematical logic. Amer. Math. Monthl **44**, 70—80 (1937). — [2] HAILPERIN, TH.: A set of axioms for logic. J. Symb. Logic. **9** 1—19 (1944). — [3] FRAENKEL, A.: Einleitung in die Mengenlehre, 3. Aufl. Berlin 1928. — [4] QUINE, W. V.: Mathematical logic. Revised ed. Cambridge, Mass. 1951. — [5] QUINE W. V.: On ordered pairs. J. Symb. Logic. **10**, 95—96 (1945). — [6] CHURCH, A.: Introduction to mathematical logic, part I. Princeton 1944. — [7] QUINE, W. V.: On relations as coestensive as with classes. J. Symb. Logic. **11**, 71—72 (1946). — [8] BERNAYS, P. A system of axiomatic set theory. II. J. Symb. Logic. **6**, 1—17 (1941). — [9] SKOLEM, TH. Sur la portée du théorème de Löwenheim-Skolem. Les entretiens de Zürich 1938, S. 25—52 Zürich 1941. — [10] CARNAP, R.: Logical syntax of language. London 1937. — [11] WANG H.: Arithmetic translations of axiom systems. Trans. Amer. Math. Soc. **71**, 283—29 (1951).

Dept. of Philosophy, Harvard University, Cambridge, Mass. (USA.)

(Eingegangen am 19. März 1953.)

Krull, W.
Math. Zeitschr. Bd. 59, S. 57—60 (1953)

Über Polynomzerlegung mit endlich vielen Schritten.

Von
Wolfgang Krull.

Die folgenden Bemerkungen wurden angeregt durch eine kürzlich von Herrn Martin Kneser in dieser Zeitschrift veröffentlichte Note[1]). — Unter einem *endlichen Körper* möge im folgenden ein Körper K verstanden werden, der aus einem Primkörper K_0 durch Körperadjunktion von endlich vielen Elementen entsteht, $K = K_0(\varrho_1, \ldots, \varrho_l)$. Der endliche Körper K möge in zwei Fällen *wohldefiniert* heißen: *1. Fall*: Es ist zu K ein Erzeugendensystem $\tau_1, \ldots, \tau_m; \sigma_1, \ldots, \sigma_n$ und ein Polynomsystem $p_1(x_1), p_2(x_1, x_2), \ldots, p_n(x_1, \ldots, x_n)$ über $K_0(\tau_1, \ldots, \tau_m)$ so gegeben, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind: α) Die τ_i sind über K_0 algebraisch unabhängig, es ist also $K_0(\tau_1, \ldots, \tau_m)$ eine rein transzendente Erweiterung von K_0. β) Es ist $p_i(\sigma_1, \ldots, \sigma_i) = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$. γ) $p_i(\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}; x_i)$ ist irreduzibel über $K_0(\tau_1, \ldots, \tau_m; \sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1})$ $(i = 1, \ldots, n)$. *2. Fall*: Es ist ein System $\tau_1, \ldots, \tau_m$ von über K_0 algebraisch unabhängigen Elementen und ein (nicht notwendig irreduzibles) Polynom $p(x)$ mit Koeffizienten aus $K_0(\tau_1, \ldots, \tau_m)$ gegeben, und es ist K definiert als der kleinste Zerfällungskörper von $p(x)$ [also als der zu $p(x)$ gehörige Normalkörper] über $K_0(\tau_1, \ldots, \tau_m)$.

Ist K ein beliebiger Körper, $p(x_1, \ldots, x_\mu)$ ein Polynom aus $K[x_1, \ldots, x_\mu]$, so wollen wir $p(x_1, \ldots, x_\mu)$ im *engeren Sinne endlich zerlegbar* nennen, wenn unmittelbar aus den Koeffizienten von $p(x_1, \ldots, x_\mu)$ eine Schranke U berechnet werden kann, derart, daß die Zerlegung von $p(x_1, \ldots, x_\mu)$ in seine über K irreduziblen Faktoren höchstens N rationale Rechenoperationen erfordert. (Dabei wollen wir die — in komplizierteren Fällen sehr beträchtliche — Rechenarbeit vernachlässigen, die zur expliziten Bestimmung von U nötig ist.) — Von *endlicher Zerlegbarkeit in weiterem Sinne* soll gesprochen werden, wenn sich die Zerlegung von $p(x_1, \ldots, x_\mu)$ in eine von vornherein angebbare Anzahl M von Etappen so aufspalten läßt, daß die folgende Bedingung erfüllt ist: Zunächst kann unmittelbar aus den Koeffizienten von $p(x_1, \ldots, x_\mu)$ eine Schranke N_1 für die Anzahl derjenigen rationalen Rechenoperationen ermittelt werden, die zur Erreichung des Endzieles der ersten Etappe nötig sind. Am Ende der ersten Etappe läßt sich dann weiter eine entsprechende Schranke N_2 für die Anzahl der Schritte finden, die zum Ziel der zweiten Etappe führen, usw. Man überlegt sich leicht, daß bei schwierigeren Fällen, in denen die Möglichkeit der endlichen Zerlegung bewiesen wird, in der Regel nur die Zerlegbarkeit im weiteren Sinne unmittelbar evident ist. Hat man z. B. den zweiten Fall eines wohldefinierten Körpers, so muß man, um in ihm wirklich

[1]) Bemerkung über Primpolynomzerlegung in endlich vielen Schritten. Math. Z. **57**, 238—240 (1953).

rechnen zu können, zunächst eine dem ersten Fall entsprechende Basis herstellen. Außerdem ist bei Charakteristik p die eventuell gefundene Basis durch eine neue zu ersetzen, bei der das Auftreten von inseparablen Erweiterungen vermieden ist, usw. Es dürfte kaum allgemein zu zeigen sein, daß die Begriffe „endlich zerlegbar im engeren Sinne" und „endlich zerlegbar im weiteren Sinne" stets äquivalent sein müssen. Aber es gilt wenigstens ohne jede Einschränkung, insbesondere ohne zusätzliche Separabilitätsvoraussetzungen: *Über jedem wohldefinierten Körper K ist jedes Polynom $p(x_1, \ldots, x_n)$ im engeren Sinne endlich zerlegbar*[2]).

Die Resultate von Herrn KNESER widersprechen diesem Ergebnis nicht; er hat im wesentlichen folgendes gezeigt: 1. Man kann einen endlichen Körper K definieren, über dem sich jedes Polynom (zum mindesten im weiteren Sinne) endlich zerlegen läßt, obwohl es unter Umständen unmöglich ist, aus der Ausgangsdefinition eine Darstellung von K abzuleiten, die K als wohldefiniert erscheinen läßt. 2. Über einer passenden einfachen inseparablen Erweiterung L von K gibt es Polynome, die in keinem Sinne endlich zerlegbar sind, — zum mindesten so lange nicht, als man von K nur das weiß, was unmittelbar aus der allgemeinen, eine nicht näher präzisierte „Eigenschaft $E(n)$" enthaltenden Definition dieses Körpers erschlossen werden kann. — Bei 2. ist leicht zu sehen, daß man auf die Inseparabilität von L über K nicht verzichten kann. Im übrigen läßt sich 2. aus der speziellen Definition von K in wenigen Zeilen ableiten, und man kann wohl unbedenklich sagen: Die eigentliche Pointe der KNESERschen Überlegung beruht darauf, daß ein endlicher Körper nicht wohldefiniert zu sein braucht, wenn über ihm alle Polynome endlich zerlegbar sein sollen[3]). Es dürfte sich unter diesen Umständen lohnen, kurz zu zeigen, daß auch bei Charakteristik 0 über gewissen nicht wohldefinierten Körpern alle Polynome endlich zerlegbar sind.

Es seien $N_1, N_2, \ldots$ die nach wachsender Größe geordneten, durch kein Quadrat teilbaren, ganzen Zahlen >1, und es genüge der Körper K den folgenden Bedingungen: 1. Es ist entweder K gleich dem Körper K_0 der rationalen Zahlen oder gleich $K_0(\sqrt{-N_{\nu_0}})$ für passendes ν_0. 2. Für jedes feste ν kann rational mit endlich vielen Schritten entschieden werden, ob $\sqrt{-N_\nu}$ zu K

[2]) Die endliche Zerlegbarkeit im weiteren Sinne kann aus den klassischen KRONECKERschen Ergebnissen erschlossen werden, wenn man für den Fall der Charakteristik p noch den Satz hinzunimmt, daß zu jedem wohldefinierten endlichen Körper rational mit endlich vielen Schritten ein Erzeugendensystem $\tau_1, \ldots, \tau_m; \sigma_1, \ldots, \sigma_n$ berechnet werden kann, derart, daß $K_0(\tau_1, \ldots, \tau_m)$ über K_0 rein transzendent, K über $K_0(\tau_1, \ldots, \tau_m)$ *separabel* algebraisch ist. (Vgl. hierzu z. B. O. HAUPT, Lehrbuch der Algebra, Bd. 2, Abschn. 23.) — Wesentlich schwieriger ist der Beweis, daß sogar endliche Zerlegbarkeit in engerem Sinne vorliegt. Er wurde in allen Einzelheiten in größerem Zusammenhange von O. ENDLER durchgeführt. (Konstruktion von allgemeinen Normalkörpern in beschränkt vielen Schritten. Hausdorff-Gedächtnis-Preisarbeit der Math.-Nat.-Fakultät Bonn 1952.)

[3]) Von jetzt ab verstehen wir unter „endlicher Zerlegbarkeit" immer Zerlegbarkeit im weiteren Sinne. Auch wenn später von „rationaler Berechnung (Entscheidung) mit endlich vielen Schritten" die Rede ist, soll die Bezeichnung im weiteren Sinne aufgefaßt werden.

ehört oder nicht[4]). *Dann ist über K jedes Polynom endlich zerlegbar, — selbst enn die Definition von K keine Handhabe liefert, um zu entscheiden, ob $K = K_0$ der $K > K_0$.*

Zum Beweis überlegt man sich zunächst leicht, daß es genügt, über K_0 reduzible Polynome aus $K_0[x_0, \ldots, x_\mu]$ zu betrachten, und daß jedes zu ntersuchende Polynom in der Gestalt $x_0^n + \sum_{k=1}^{n} q_k(x_1, \ldots, x_\mu) \cdot x_0^{n-k}$ mit anzzahligen Polynomen $q_k(x_1, \ldots, x_\mu)$ als Koeffizienten angenommen werden arf, da diese Normalform rational mit endlich vielen Schritten durch eine neare homogene Variablentransformation erreicht werden kann[5]). Ist ferner $x_0^n + \sum_{k=1}^{n} q_k(x_1, \ldots, x_\mu) \cdot x_0^{n-k}$ über K_0 irreduzibel, so kann das Polynom öchstens dann über K reduzibel werden, wenn es in x_0 und allen übrigen ariablen eine geraden Grad hat. — Wir beweisen jetzt zunächst den folgenden *ilfssatz:*

Es sei $p(x_0; x_1, \ldots, x_\mu) = x_0^{2m_0} + \sum_{k=1}^{2m_0} q_k(x_1, \ldots, x_\mu) \cdot x_0^{2m_0-k}$ *ein über* K_0 *reduzibles, ganzzahliges Polynom, das über dem imaginär quadratischen Zahlörper L mit der Diskriminante D reduzibel wird; $2m_i$ sei der Grad von $(x_0; x_1, \ldots, x_\mu)$ in x_i. Dann gibt es ein den Bedingungen $0 \leqq l_0 < m_0$; $\leqq l_i \leqq m_i$ $(i = 1, \ldots, \mu)$ genügendes System von ganzen Zahlen l_i, derart, daß $) \leqq 4 \cdot p(l_0; l_1, \ldots, l_\mu)$.*

In der Tat, über L muß eine Gleichung gelten:

$$
\begin{aligned}
&(x_0; x_1, \ldots, x_\mu) \\
&= \left[\left(x_0^{m_0} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m_0} r_k(x_1, \ldots, x_\mu) \cdot x_0^{m_0-k}\right) + \frac{\sqrt{-D}}{2}\sum_{k=1}^{m_0} s_k(x_1, \ldots, x_\mu) \cdot x_0^{m_0-k}\right] \cdot \\
&\quad \left[\left(x_0^{m_0} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m_0} r_k(x_1, \ldots, x_\mu) \cdot x_0^{m_0-k}\right) - \frac{\sqrt{-D}}{2}\sum_{k=1}^{m_0} s_k(x_1, \ldots, x_\mu) \cdot x_0^{m_0-k}\right] \\
&= \left(x_0^{m_0} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m_0} r_k(x_1, \ldots, x_\mu) \cdot x_0^{m_0-k}\right)^2 + \frac{D}{4}\left(\sum_{k=1}^{m_0} s_k(x_1, \ldots, x_\mu) \cdot x_0^{m_0-k}\right)^2,
\end{aligned}
$$

ei der die $r_k(x_1, \ldots, x_\mu)$ und $s_k(x_1, \ldots, x_\mu)$ ganzzahlige Polynome sind. [Man eachte, daß die Koeffizienten der Faktoren von $p(x_0; x_1, \ldots, x_\mu)$ ganze lgebraische Zahlen sein müssen, und berücksichtige die bekannten Sätze ber Basen und Diskriminanten in quadratischen Zahlkörpern.] — Da jedes

[4]) Ein Körper der gewünschten Art kann allgemein mit Hilfe einer nicht näher festelegten Eigenschaft $E(n)$ definiert werden. Will man ein konkretes Beispiel haben, so ann man etwa festsetzen: Gibt es in der Dezimalbruchentwicklung von π eine Sequenz on 10^6 Einsen, so sei $K = K_0(\sqrt{-N_{\nu_0}})$, wobei ν_0 die kleinste Stellenzahl, mit der eine olche Sequenz beginnt. Gibt es keine solche Sequenz, so sei $K = K_0$.

[5]) Man könnte auch jedes betrachtete Polynom durch die bekannte KRONECKERsche ubstitution auf ein Polynom in einer Veränderlichen reduzieren. Daß wir Polynome n beliebig vielen Veränderlichen betrachten, geschieht eigentlich dem gleich folgenden ilfssatz zuliebe.

$s_k(x_1, \ldots, x_\mu)$ in x_i höchstens den Grad μ_i besitzt, existiert weiter ein System von ganzen Zahlen l_i mit $0 \leqq l_0 < m_0$; $0 \leqq l_i \leqq m_1$ $(i = 1, \ldots, \mu)$, derart, daß $\sum_{k=1}^{m_0} s_k(l_1, \ldots, l_\mu) \cdot l_0^{m_0-k} \neq 0$ und damit $\left| \sum_{k=1}^{m_0} s_k(l_1, \ldots, l_\mu) \cdot l_0^{m_0-k} \right| \geqq 1$. Für dieses System gilt aber offenbar die gewünschte Ungleichung. Wenden wir nun den Hilfssatz auf unseren Fall an, so sehen wir sofort: Ist das über K irreduzible Polynom $p(x_0; x_1, \ldots, x_\mu) = x_0^{2m_0} + \sum_{k=1}^{2m_0} q_k(x_1, \ldots, x_\mu) \cdot x_0^{2m_0-k}$ vorgelegt, so läßt sich mit endlich vielen Schritten eine Schranke ν^* finden derart, daß $p(x_0; x_1, \ldots, x_\mu)$ höchstens dann über K reduzibel werden kann, wenn K gleich einem der Körper $K_0\left(\sqrt{-N_\nu}\right)$ $(\nu = 1, \ldots, \nu^*)$ wird. Ob aber diese Bedingung erfüllt ist, kann nach Voraussetzung rational mit endlich vielen Schritten nachgeprüft werden. Ist das Ergebnis positiv, so hat man eine wohldefinierte Darstellung von K gewonnen, und die endliche Zerlegbarkeit von $p(x_0; x_1, \ldots, x_\mu)$ ist gesichert. Mit dieser Feststellung ist unser Beweis abgeschlossen. — Natürlich wird es in der Praxis nur selten vorkommen, daß ein Körper in so unhandlicher Weise definiert ist, wie in unserem Beispiel. Das eigentlich Bemerkenswerte ist aber auch nicht die Definition von K, sondern der Umstand, der es uns ermöglicht, die endliche Zerlegbarkeit über K zu beweisen.

Wir brauchen für unsere Zwecke eine unendliche Folge $K_1, K_2, \ldots$ von paarweise verschiedenen endlichen algebraischen Oberkörpern eines endlichen Grundkörpers K_0 mit der folgenden Eigenschaft: *Zu jedem über K_0 irreduziblen Polynom $p(x)$ aus $K_0[x]$ existiert eine mit endlich vielen Schritten berechenbare Schranke ν^*, derart, daß $p(x)$ über allen Körpern $K_\nu (\nu > \nu^*)$ irreduzibel bleibt.*

Herr KNESER benützte die Tatsache, daß man eine derartige Körperkette erhält, wenn man von einer zweifach transzendenten Erweiterung K_0 eines Primkörpers der Charakteristik p ausgeht und $K_i = K_0\left(\sqrt[p]{v_i}\right)$ mit passend gewähltem $v_i \in K_0$ setzt. Hier im Texte wurde durch den Hilfssatz gezeigt, daß man für K_0 den Körper der rationalen Zahlen, für die K_i die imaginär quadratischen Zahlkörper wählen kann. Der Vergleich der beiden Fälle legt nun eine von unserem ursprünglichen Ausgangsproblem unabhängige, an sich interessante Frage nahe, mit der unsere Betrachtungen geschlossen werden sollen.

Gibt es außer der Folge der imaginär quadratischen Zahlkörper noch weitere, wesentlich verschiedene Folgen[6]) $K_1, K_2, \ldots$ von endlichen algebraischen Zahlkörpern, für die gleichfalls der Satz gilt, daß jedes rationale irreduzible, ganzzahlige Polynom $p(x)$ für $\nu > \nu^*$ $\left(p(x)\right)$ stets über K_ν irreduzibel bleibt? Gesucht sind dabei natürlich solche Körperfolgen, die sich — ähnlich wie in unserem Beispiel — durch einfache arithmetische Eigenschaften auszeichnen. Man denke etwa an Folgen von Kreisteilungskörpern

[6]) Also Folgen, die nicht aus einer unendlichen Teilfolge der Reihe aller imaginär quadratischen Körper durch Hinzunahme endlich vieler Körper entstehen.

Bonn, Mathematisches Seminar der Universität.

(Eingegangen am 22. März 1953.)

Tillmann, H.-G.
Math. Zeitschr. Bd. 59, S. 61—83 (1953)

Randverteilungen analytischer Funktionen und Distributionen.

Von
Heinz-Günther Tillmann.

Die vorliegende Arbeit setzt Untersuchungen von G. Köthe, dem ich auch die Anregung zu dieser Arbeit verdanke, fort. Es handelt sich dabei um Untersuchungen linearer Räume, deren Elemente analytische Funktionen sind.

Ist $\mathfrak{G}$ eine offene Menge in der geschlossenen Zahlenebene Ω, so sei $\mathfrak{D}(\mathfrak{G})$ bzw. $\mathfrak{A}(\mathfrak{C}\mathfrak{G})$ °) der lineare Raum der in $\mathfrak{G}$ bzw. $\mathfrak{C}\mathfrak{G}$ lokalanalytischen[1]) Funktionen. G. Köthe[2]) führte in diesen Räumen lokalkonvexe Topologien ein, so daß die Räume $\mathfrak{D}(\mathfrak{G})$ und $\mathfrak{A}(\mathfrak{C}\mathfrak{G})$ zueinander stark dual sind. Es ist also jedem stetigen linearen Funktional $x[f]$ auf $\mathfrak{D}(\mathfrak{G})$ umkehrbar eindeutig eine Funktion $\tilde{x}(z) \in \mathfrak{A}(\mathfrak{C}\mathfrak{G})$ zugeordnet, und eine ebensolche Zuordnung besteht zwischen den stetigen linearen Funktionalen auf $\mathfrak{A}(\mathfrak{C}\mathfrak{G})$ und den Funktionen $\tilde{y}(z) \in \mathfrak{D}(\mathfrak{G})$.

Für den Fall, daß $\mathfrak{C}\mathfrak{G} = C$ eine endliche, einfach geschlossene Jordan-Kurve ist, gab G. Köthe[3]) eine zweite Deutung der stetigen linearen Funktionale auf $\mathfrak{A}(C)$. Er zeigte, daß man sie auffassen kann als eine Verallgemeinerung der Randwerte auf C von analytischen Funktionen (Randverteilungen). Damit ist ein ähnlicher Standpunkt gewonnen wie in der Theorie der Distributionen[4]), zu der sich enge Beziehungen ergeben. Die Distributionen auf C sind spezielle Randverteilungen, nämlich solche von Funktionen, die langsam gegen C wachsen.

Bei Köthe war die Voraussetzung der Endlichkeit von C noch wesentlich. In der hier vorliegenden Arbeit soll auch der Fall von Kurven, die durch den unendlichfernen Punkt gehen, untersucht werden. Zugleich werden die Resultate auf Funktionen mehrerer Veränderlichen ausgedehnt. Dabei wird C als direktes Produkt von Kurven, also als Bestimmungsfläche eines Zylindergebietes vorausgesetzt.

°) Ist $\mathfrak{M}$ eine Teilmenge von Ω, so bezeichnen wir mit $\mathfrak{C}\mathfrak{M}$ das Komplement $\Omega - \mathfrak{M}$ von $\mathfrak{M}$.

[1]) Eine Funktion $f(z)$ soll in einer Menge $\mathfrak{M}$ lokalanalytisch heißen, wenn sie in jedem Punkte einer offenen Menge $\mathfrak{U} > \mathfrak{M}$ eindeutig definiert und analytisch ist, und wenn $f(z)$ in allen unendlichen Punkten von $\mathfrak{U}$ verschwindet. (Zwei Funktionselemente in verschiedenen Komponenten von $\mathfrak{U}$ brauchen also nicht durch analytische Fortsetzung auseinander hervorgehen.) Zwei auf $\mathfrak{M}$ lokalanalytische Funktionen $f_1(z)$ und $f_2(z)$ werden dabei als identisch angesehen, wenn sie in einer Umgebung von $\mathfrak{M}$ übereinstimmen.

[2]) Köthe, G. [4] (Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit).

[3]) Köthe, G. [5].

[4]) Schwartz, L. [8].

Im § 1 wird die Topologie der Räume $\mathfrak{D}(\mathfrak{G})$ und $\mathfrak{A}(\overline{\mathfrak{M}})$ eingeführt, und in § 2 werden die dualen Räume bestimmt für den Fall, daß $\mathfrak{G}=\mathfrak{G}_1\times\cdots\times\mathfrak{G}_n$ bzw. $\overline{\mathfrak{M}}=\overline{\mathfrak{M}}_1\times\cdots\times\overline{\mathfrak{M}}_n$ eine offene bzw. abgeschlossene Zylindermenge im Raume von n komplexen Veränderlichen ist.

Die Räume $\mathfrak{D}(\mathfrak{G})$ und $\mathfrak{A}(\mathbf{C}\mathfrak{G}_1\times\cdots\times\mathbf{C}\mathfrak{G}_n)$ [5]) sind zueinander stark dual, und die duale Paarung lautet

$$(1)\qquad \begin{cases} \langle\tilde{x},\tilde{u}\rangle = x[\tilde{u}] = \dfrac{1}{(2\pi i)^n}\int\cdots\int\limits_{C^*}\tilde{x}(z)\cdot\tilde{u}(z)\,dz; \\ \tilde{u}(z)\in\mathfrak{D}(\mathfrak{G}), \qquad \tilde{x}(z)\in\mathfrak{A}(\mathbf{C}\mathfrak{G}_1\times\cdots\times\mathbf{C}\mathfrak{G}_n). \end{cases}$$

C^* ist dabei die Bestimmungsfläche eines Teilbereiches $\mathfrak{G}^*$ von $\mathfrak{G}$, auf de $\tilde{x}(z)$ noch regulär ist.

Es folgt die Deutung der stetigen linearen Funktionale auf dem Raume $\mathfrak{A}(C)=\mathfrak{A}(C_1\times\cdots\times C_n)$ als „Randverteilungen", also als Größen, die auf C selbst definiert sind (§ 3). Zunächst wird gezeigt, daß jedes stetige lineare Funktional $u[x]$ starker Limes von Funktionalen $u_r[x]$ ist, denen Funktionen $\tilde{u}_r(z)$ zugeordnet sind, deren Randwerte auf C stetige Funktionen definieren. Die Funktionale $u_r[x]$ sind durch diese Randwerte vollständig bestimmt. Dadurch ist die Bezeichnung „Randverteilung" gerechtfertigt (Satz 4).

Insbesondere definieren die Funktionen aus $\mathfrak{A}(C)$ selbst Randverteilungen, so daß man $\mathfrak{A}(C)$ als Teilraum seines dualen Raumes $\mathfrak{A}'(C)$ auffassen kann. Unter der Voraussetzung, daß die C_j analytisch im weiteren Sinne sind (d. h. C_j soll durch lineare Transformation aus einer endlichen analytischen Kurve hervorgehen), wird Satz 4 dahingehend verschärft, daß die Approximation bereits durch analytische und im Unendlichen verschwindende Funktionen möglich ist.

Jede Distribution auf C mit kompaktem Träger [6]) ist Randverteilung auf C. Die Funktionen, die solche Distributionen als Randverteilungen haben, sind gerade die langsam wachsenden Funktionen, die im Unendlichen noch analytisch sind und dort verschwinden (Satz 9 und 10). Es wird für diese stetigen linearen Funktionale eine Darstellung durch Integrale auf C selbst gewonnen, aus der unmittelbar der Wert des Funktionals für beliebige, unbeschränkt differenzierbare Funktionen berechnet werden kann, ohne daß noch eine Approximation der differenzierbaren durch analytische Funktionen zu Hilfe genommen werden muß.

Auf Grund dieser Darstellung der Distributionen mit kompaktem Träger kann dann eine unmittelbare funktionentheoretische Definition der starken Topologie im Distributionenraum $\mathfrak{E}'(C)$ gegeben werden.

---

[5]) Ist $\mathfrak{G}=\mathfrak{G}_1\times\cdots\times\mathfrak{G}_n$ so wird $\mathbf{C}\mathfrak{G}_1\times\cdots\times\mathbf{C}\mathfrak{G}_n$ im folgenden vielfach mit $\mathbf{C}\mathfrak{G}$ bezeichnet.

[6]) Vgl. a. a. O. [4]).

1. Die Räume $\mathfrak{D}(\mathfrak{G})$ und $\mathfrak{A}(\overline{\mathfrak{M}})$.

Ist $\mathfrak{G}$ eine offene Punktmenge im Osgoodschen Raum $\Omega^n = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n$ (Ω_j = Riemannsche Zahlenkugel), so sei $\mathfrak{D}(\mathfrak{G})$ der lineare Raum aller in $\mathfrak{G}$ lokalanalytischen Funktionen, in dem auf die folgende Weise eine Topologie $\mathfrak{T}_0$ eingeführt wird: $\{\overline{\mathfrak{G}}_k\}$ sei eine Ausschöpfung des Bereiches $\mathfrak{G}$, und $\mathfrak{B}(\overline{\mathfrak{G}}_k)$ sei der Banach-Raum aller Funktionen, die im Innern von $\overline{\mathfrak{G}}_k$ lokalanalytisch und auf dem Rande noch stetig sind, mit der Norm

$$2) \qquad \|f\|_k = \sup_{z \in \overline{\mathfrak{G}}_k} |f(z)| .$$

Nun ist offenbar $\mathfrak{D}(\mathfrak{G}) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathfrak{B}(\overline{\mathfrak{G}}_k)$, und die Umgebungen

$$3) \qquad \mathfrak{U}_{k,\varepsilon} = \{f : \|f\|_k \leq \varepsilon\}, \qquad k = 1, 2, \ldots; \quad \varepsilon > 0,$$

definieren eine Topologie $\mathfrak{T}_0$ in $\mathfrak{D}(\mathfrak{G})$. $\mathfrak{D}(\mathfrak{G})$ ist dann lokalkonvex, metrisierbar und vollständig, also ein Raum vom Typus F[7]). Aus dem Satz von Montel folgt, daß in $\mathfrak{D}(\mathfrak{G})$ jede beschränkte Menge[8]) relativ kompakt, also $\mathfrak{D}(\mathfrak{G})$ sogar ein M-Raum[9]) ist. Da jede abgeschlossene Menge aus $\mathfrak{G}$ in einem $\overline{\mathfrak{G}}_k$ enthalten ist, sieht man, daß die Topologie $\mathfrak{T}_0$ von der Wahl der Ausschöpfungsfolge unabhängig ist.

Eine Folge $f_m \in \mathfrak{D}(\mathfrak{G})$ ist offenbar genau dann konvergent bei $\mathfrak{T}_0$, wenn die f_m auf jedem abgeschlossenen Teilbereich von $\mathfrak{G}$ gleichmäßig konvergieren.

Für eine abgeschlossene Teilmenge $\overline{\mathfrak{M}} \subset \Omega^n$ werde der lineare Raum der in $\overline{\mathfrak{M}}$ lokalanalytischen Funktionen mit $\mathfrak{A}(\overline{\mathfrak{M}})$ bezeichnet. Ist nun $\{\overline{\mathfrak{M}}_k\}$ eine monotone Folge von Umgebungen von $\overline{\mathfrak{M}}$ mit $\overline{\mathfrak{M}} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\mathfrak{M}}_k$, so gilt $\mathfrak{A}(\overline{\mathfrak{M}}) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathfrak{B}(\overline{\mathfrak{M}}_k)$. Die Topologie $\mathfrak{T}_1$ von $\mathfrak{A}(\overline{\mathfrak{M}})$ werde nun definiert als die Topologie der lokalkonvexen Hülle der Banach-Räume $\mathfrak{B}(\overline{\mathfrak{M}}_k)$. $\mathfrak{T}_1$ ist also die feinste lokalkonvexe Topologie in $\mathfrak{A}(\overline{\mathfrak{M}})$, die gröber ist als die Topologie in den Räumen $\mathfrak{B}(\overline{\mathfrak{M}}_k)$ und wird definiert durch die Umgebungen:

$$4) \qquad \mathfrak{U}_{\{\varepsilon_k\}} = \left\{ f : f = \sum \alpha_j f_j \wedge \sum |\alpha_j| \leq 1 \wedge \sup_{z \in \overline{\mathfrak{M}}_j} |f_j(z)| = \|f_j\|_j \leq \varepsilon_j \right\} = \prod_{k=1}^{\infty} \mathfrak{U}_{k,\varepsilon_k}\ ^{10}).$$

Die Topologie $\mathfrak{T}_1$ hängt von der Wahl der Umgebungsfolge $\{\overline{\mathfrak{M}}_k\}$ nicht ab, denn jede Umgebung von $\overline{\mathfrak{M}}$ enthält eines der $\overline{\mathfrak{M}}_k$.

Hilfssatz 1. *Eine Folge $f_m \in \mathfrak{A}(\overline{\mathfrak{M}})$ ist bezüglich $\mathfrak{T}_1$ dann und nur dann konvergent, wenn alle f_m auf einer festen Umgebung von $\overline{\mathfrak{M}}$ analytisch sind und dort gleichmäßig konvergieren.*

[7]) Dieudonné, J., u. Schwartz, L. [2].

[8]) Eine Menge $\mathfrak{B}$ eines linearen Raumes heißt beschränkt, wenn es zu jeder Umgebung $\mathfrak{U}$ ein $\lambda > 0$ gibt, so daß $\mathfrak{B} \subset \lambda \cdot \mathfrak{U}$. Eine Menge $\mathfrak{B}$ aus $\mathfrak{D}(\mathfrak{G})$ ist offenbar genau dann beschränkt, wenn alle Funktionen $f(z) \in \mathfrak{B}$ auf jeder abgeschlossenen Teilmenge von $\mathfrak{G}$ gleichmäßig beschränkt sind.

[9]) Vgl. a. a. O. [7]).

[10]) $\prod_{i \in I} \mathfrak{U}_i$ ist die konvexe Hülle der Mengen $\mathfrak{U}_i$.

Hilfssatz 2. *Eine Menge $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}(\overline{\mathfrak{M}})$ ist dann und nur dann beschränkt, wenn alle Funktionen aus $\mathfrak{B}$ in einer festen Umgebung von $\overline{\mathfrak{M}}$ analytisch und dort gleichmäßig beschränkt sind.*

Beweis. Wir nehmen an, Hilfssatz 2 sei falsch. Dann gibt es zu jeder Umgebung $\overline{\mathfrak{M}}_k > \overline{\mathfrak{M}}$ eine Funktion $g_k(z) \in \mathfrak{B}$, für die gilt

$$g_k \notin \mathfrak{B}(\mathfrak{M}_k) \quad \text{oder} \quad \|g_k\|_k = \sup_{z \in \overline{\mathfrak{M}}_k} |g_k(z)| > k. \tag{5}$$

Wir bestimmen nun rekursiv eine Folge $\{\varepsilon_k\}$ so, daß die Umgebung $\mathfrak{U}_{\{\varepsilon_k\}}$ die Funktionen $\frac{1}{k} g_k$ sämtlich nicht enthält. Dann ist $\mathfrak{B}$ in keinem $\lambda \cdot \mathfrak{U}_{\{\varepsilon_k\}}$ enthalten, kann also nicht beschränkt sein. Wir setzen $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}$. Dann ist $g_1 \notin \mathfrak{U}_{1,\varepsilon_1}$ und es ist nicht Häufungspunkt von $\mathfrak{U}_{1,\varepsilon_1}$ bezüglich der gleichmäßigen Konvergenz in $\mathfrak{M}_1$[11]:

$$g_1 \notin \overline{\mathfrak{U}}_{1,\varepsilon_1}^{(\mathfrak{M}_1)}; \qquad \left(\frac{1}{j} g_j \notin \overline{\mathfrak{U}}_{1,\varepsilon_1}^{(\mathfrak{M}_1)} \text{ ist trivial für } j > 1\right). \tag{6}$$

Es sei nun $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_K$ bereits so bestimmt, daß $\varepsilon_j \leq 2^{-j}$ und

$$\frac{1}{j} g_j \notin \overline{\prod_{i=1}^{k} \mathfrak{U}_{i,\varepsilon_i}^{(\mathfrak{M}_k)}} \quad \text{gilt für alle } j. \tag{7}$$

Wir betrachten nun alle Zerlegungen

$$\left\{ \begin{array}{c} g_1(z) = \alpha_1 \cdot h_1(z) + \beta_1 k_1(z) \\ \vdots \\ \frac{1}{k+1} g_{k+1}(z) = \alpha_{k+1} \cdot h_{k+1}(z) + \beta_{k+1} k_{k+1}(z) \end{array} \right. \tag{8}$$

mit $|\alpha_j| + |\beta_j| \leq 1$, $h_j(z) \in \prod_{i=1}^{k} \mathfrak{U}_{i,\varepsilon_i}$ und $k_j(z) \in \mathfrak{B}(\overline{\mathfrak{M}}_{k-1})$, so sind die

$$\|k_j(z)\|_{k+1} = \sup_{z \in \overline{\mathfrak{M}}_{k+1}} |k_j(z)| \quad (j = 1, \ldots, k+1) \tag{9}$$

nach unten durch eine positive Konstante c_{k+1} beschränkt, da es sonst für wenigstens ein j eine Folge $\alpha_j^{(\nu)} h_j^{(\nu)}(z) \in \prod_{m=1}^{k} \mathfrak{U}_{m,\varepsilon_m}$ gäbe, die auf $\overline{\mathfrak{M}}_{k+1}$ und damit auch in $\mathfrak{M}_k$ gleichmäßig gegen $\frac{1}{j} g_j(z)$ konvergieren würde. Nun setzen wir

$$\varepsilon_{k+1} = \min\left(\tfrac{1}{2} c_{k+1}, 2^{-(k+1)}\right). \tag{10}$$

Dann gilt für $j \leq k+1$:

$$\frac{1}{j} g_j(z) \notin \overline{\prod_{m=1}^{k+1} \mathfrak{U}_{m,\varepsilon_m}^{(\mathfrak{M}_{k+1})}}. \tag{11}$$

---

[11]) Die abgeschlossene Hülle einer Menge $\mathfrak{U}$ bezüglich der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz in $\mathfrak{M}_k$ bezeichnen wir mit $\overline{\mathfrak{U}}^{(\mathfrak{M}_k)}$.

a $g_j \notin j \cdot \mathfrak{U}_{j,1}$ ist, gilt aber (11) auch für alle $j > k+1$, weil für $f(z) \in \bigcap_{m=1}^{k-1} \mathfrak{U}_{m,\varepsilon_m}$ lt:

$$1 - \frac{1}{2^{k+1}} > ||f(z)||_{k+1} = \sup_{z \in \overline{\mathfrak{M}}_{k+1}} |f(z)| . \tag{12}$$

amit ist gezeigt, daß es eine Umgebung $\mathfrak{U}_{\{\varepsilon_k\}}$ in $\mathfrak{A}(\overline{\mathfrak{M}})$ gibt, die keine der unktionen $\frac{1}{j} g_j(z)$ enthält. Es gilt also für jedes j

$$\mathfrak{B} \not\subset j \cdot \mathfrak{U}_{\{\varepsilon_k\}} \tag{13}$$

h. $\mathfrak{B}$ kann nicht beschränkt sein und Hilfssatz 2 ist bewiesen.

Zugleich entnimmt man diesem Beweise auch, daß $\mathfrak{A}(\overline{\mathfrak{M}})$ bei der Topologie separiert ist. Denn ist $f(z)$ eine beliebige Funktion aus $\mathfrak{A}(\overline{\mathfrak{M}})$, so ist $f(z)$ uf einem $\overline{\mathfrak{M}}_k$ analytisch, und es gibt ein $\lambda > 0$, so daß $||\lambda \cdot f||_k > 1$ ist. Der orstehende Beweis zeigt nun, daß es eine Umgebung $\mathfrak{U}_{\{\varepsilon_k\}}$ gibt, die $\lambda \cdot f(z)$ icht enthält. Folglich ist $f(z)$ selbst nicht in der Umgebung

$$\mathfrak{U}_{\{\lambda^{-1} \cdot \varepsilon_k\}}$$

nthalten. Nun ergibt sich auch Hilfssatz 1 relativ leicht. Ist $\{f_m(z)\}$ konergent, so ist die Folge f_m insbesondere beschränkt, bildet also in einer mgebung von $\overline{\mathfrak{M}}$ eine normale Familie. Da $f_m(z)$ bezüglich der separierten opologie $\mathfrak{T}_1$ konvergiert, ist der Limes für alle aus $\{f_m\}$ ausgewählten gleichäßig konvergenten Teilfolgen der gleiche. Infolgedessen ist auch $\{f_m\}$ selbst uf einer festen Umgebung gleichmäßig konvergent gegen diesen Limes der lso auch zu $\mathfrak{A}(\overline{\mathfrak{M}})$ gehört. Damit ist auch Hilfssatz 1 und die Folgen-Vollständigkeit von $\mathfrak{A}(\overline{\mathfrak{M}})$ bewiesen.

2. Der Dualitätssatz für die Funktionenräume $\mathfrak{D}(\mathfrak{P})$ und $\mathfrak{A}(\mathfrak{P}^C)$ über Zylindermengen.

Es seien $\mathfrak{D}_1, \ldots, \mathfrak{D}_n$ offene Punktmengen in der geschlossenen Zahlenbene und

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{D}_1 \times \cdots \times \mathfrak{D}_n \tag{14}$$

er Zylinderbereich mit den Projektionen $\mathfrak{D}_j$.

Ist $x[f(z)]$ ein stetiges lineares Funktional auf dem Raum $\mathfrak{D}(\mathfrak{P})$, so ist x uf einer $\mathfrak{T}_0$-Umgebung in $\mathfrak{D}(\mathfrak{P})$ beschränkt: $|x[f(z)]| \leq M_1$ falls

$$||f||_k \leq \varepsilon \quad \text{oder} \quad |x[f]| \leq M \cdot ||f||_k, \quad \left(M = \frac{M_1}{\varepsilon}\right). \tag{15}$$

ist also auch stetig in dem BANACH-Raum $\mathfrak{B}(\overline{\mathfrak{P}}_k)$ und läßt sich nach dem AHN-BANACHschen Erweiterungssatz auf diesen ganzen Raum stetig fortetzen. Das so fortgesetzte Funktional bezeichnen wir auch wieder mit x.

Jede Funktion $f(z) \in \mathfrak{D}(\mathfrak{P})$ läßt sich in einer Zylinderumgebung

$$\mathfrak{U}_k = \mathfrak{U}_{1,k} \times \cdots \times \mathfrak{U}_{n,k}, \qquad (\overline{\mathfrak{U}}_{j,k} < \mathfrak{D}_j), \tag{16}$$

von $\overline{\mathfrak{P}}_K$ durch die CAUCHYsche Integralformel darstellen[12]):

$$(17)\qquad f(z)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{C_{1,k}\times\cdots\times C_{n,k}=C_k}\cdots\int f(\zeta)\cdot\frac{1}{\zeta-z}\,d\zeta=\frac{1}{(2\pi i)^n}\lim_{\Delta\to 0}\sum f(\zeta_\nu)\cdot\frac{1}{\zeta_\nu-z}\,\Delta\zeta_\nu$$

$C_{j,k}$ ist dabei der Rand von $\mathfrak{U}_{j,k}$.

Die RIEMANNschen Summen konvergieren auf $\overline{\mathfrak{P}}_k$ gleichmäßig, also im Sinne der Topologie von $\mathfrak{B}(\overline{\mathfrak{P}}_k)$, gegen $f(z)$. Infolgedessen gilt:

$$(18)\qquad \begin{cases} x[f(z)]=\dfrac{1}{(2\pi i)^n}\lim\limits_{\Delta\to 0}\sum f(\zeta_\nu)\,x\left[\dfrac{1}{\zeta_\nu-z}\right]\Delta\zeta_\nu=\dfrac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{C_k}\cdots\int f(\zeta)\,x\left[\dfrac{1}{\zeta-z}\right]d\zeta \\ \qquad\qquad =\dfrac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{C_k}\cdots\int f(\zeta)\,\tilde{x}(\zeta)\cdot d\zeta. \end{cases}$$

Die Funktion

$$(19)\qquad \tilde{x}(\zeta)=x\left[\frac{1}{\zeta-z}\right]$$

ist analytisch in einer Umgebung der abgeschlossenen Zylindermenge

$$(20)\qquad \mathfrak{P}^{\mathfrak{C}}=\mathfrak{C}\mathfrak{D}_1\times\cdots\times\mathfrak{C}\mathfrak{D}_n.$$

Denn für $\zeta_j\in\mathfrak{C}\,\overline{\mathfrak{U}}_{j,k}$ konvergiert für $h\to 0$

$$(21)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{h}\left\{\dfrac{1}{\zeta_1-z_1}\cdots\dfrac{1}{\zeta_j+h-z_j}\cdots\dfrac{1}{\zeta_n-z_n}-\dfrac{1}{\zeta_1-z_1}\cdots\dfrac{1}{\zeta_j-z_j}\cdots\dfrac{1}{\zeta_n-z_n}\right\} \\ \qquad =\dfrac{1}{h}\left\{\dfrac{1}{\zeta_j+h-z_j}-\dfrac{1}{\zeta_j-z_j}\right\}\cdot\prod\limits_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{n}\dfrac{1}{\zeta_l-z_l} \end{cases}$$

auf $\overline{\mathfrak{P}}_k$ gleichmäßig, so daß auch

$$(22)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{h}\{\tilde{x}(\zeta_1,\ldots,\zeta_j+h,\ldots,\zeta_n)-\tilde{x}(\zeta_1,\ldots,\zeta_n)\} \\ \qquad =x\left[\dfrac{1}{h}\left\{\dfrac{1}{\zeta_j+h-z_j}-\dfrac{1}{\zeta_j-z_j}\right\}\cdot\prod\limits_{l\neq j}\dfrac{1}{\zeta_l-z_l}\right] \end{cases}$$

für $h\to 0$ konvergiert und man erhält:

$$(23)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\tilde{x}(\zeta)}{\partial\zeta_j}=x\left[\dfrac{(-1)}{(\zeta_1-z_1)\ldots(\zeta_j-z_j)^2\ldots(\zeta_n-z_n)}\right] & \text{und allgemein:} \\ \dfrac{\partial^{|k|}\tilde{x}(\zeta)}{\partial\zeta_1^{k_1}\partial\zeta_n^{k_n}}=x\left[\dfrac{(-1)^{k}\,k_1!\ldots k_n!}{(\zeta_1-z_1)^{k_1+1}\ldots(\zeta_n-z_n)^{k_n+1}}\right]. & \end{cases}$$

Die Entwicklungskoeffizienten der Potenzreihen von $\tilde{x}(\zeta)$ lassen sich also bestimmen als die Werte des Funktionals x für einfache, rationale Funktionen aus $\mathfrak{D}(\mathfrak{P})$.

[12]) Zur Vereinfachung der Schreibweise benutzen wir die Abkürzungen

$$z=(z_1,\ldots,z_n);\qquad \zeta-z=(\zeta_1-z_1)\ldots(\zeta_n-z_n)$$
$$dz=dz_1\ldots dz_n;\qquad \Delta z=\Delta\zeta_1\ldots\Delta\zeta_n.$$

Weiter verschwindet $\tilde{x}(\zeta)$ in allen unendlichfernen Punkten von

$$\overline{\mathfrak{U}}_k^{\mathfrak{C}} = \mathfrak{C}\,\overline{\mathfrak{U}}_{1,k} \times \cdots \times \mathfrak{C}\,\overline{\mathfrak{U}}_{n,k}.$$

Denn gehört der unendlichferne Punkt zu $\mathfrak{C}\,\mathfrak{U}_{j,k}$, so ist z_j auf $\overline{\mathfrak{P}}_k$ beschränkt, da $\mathfrak{U}_k \supset \overline{\mathfrak{P}}_k$. Für $\zeta_j \to \infty$ geht also $\frac{1}{(\zeta_1 - z_1)\cdots(\zeta_n - z_n)}$ auf $\overline{\mathfrak{P}}_k$ gleichmäßig gegen Null, so daß auch

$$\lim_{\zeta_j \to \infty} \tilde{x}(\zeta) = \lim_{\zeta_j \to \infty} x\left[\frac{1}{(\zeta_1 - z_1)\cdots(\zeta_n - z_n)}\right] = 0 \tag{24}$$

ist. Umgekehrt erzeugt jedes $\tilde{y}(\zeta)$ aus $\mathfrak{A}(\mathfrak{P}^{\mathfrak{C}})$ ein stetiges lineares Funktional

$$y[f] = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{C_{k'}} \cdots \int f(\zeta)\,\tilde{y}(\zeta)\,d\zeta \tag{25}$$

ist durch y eindeutig bestimmt, denn es gilt für $\tilde{y}(\zeta)$ die CAUCHYsche Darstellung

$$\tilde{y}(\zeta) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{C_{k'}} \cdots \int \tilde{y}(z) \cdot \frac{1}{\zeta - z}\,dz = y\left[\frac{1}{\zeta - z}\right]. \tag{26}$$

Die Zuordnung $y \to \tilde{y}(\zeta)$ ist also eine Isomorphie des zu $\mathfrak{D}(\mathfrak{P})$ dualen Raumes $\mathfrak{D}'(\mathfrak{P})$ mit $\mathfrak{A}(\mathfrak{P}^{\mathfrak{C}})$.

Wir zeigen nun, daß $\mathfrak{A}'(\mathfrak{P}^{\mathfrak{C}})$ wieder zu $\mathfrak{D}(\mathfrak{P})$ isomorph ist. Jede Funktion $f(z) \in \mathfrak{A}(\mathfrak{P}^{\mathfrak{C}})$ läßt sich in einer Umgebung von $\mathfrak{P}^{\mathfrak{C}}$ durch die CAUCHYsche Formel darstellen, wobei das Integral im Sinne der Topologie $\mathfrak{T}_1$ konvergiert:

$$f(z) = \frac{(-1)^n}{(2\pi i)^n} \int_{C_k} \cdots \int f(\zeta)\,\frac{1}{\zeta - z}\,d\zeta. \tag{27}$$

Für ein stetiges Funktional $u[f]$ gilt also wieder

$$u[f] = \frac{(-1)^n}{(2\pi i)^n} \int_{C_k} \cdots \int f(\zeta)\,\tilde{u}(\zeta)\,d\zeta, \quad \text{wo} \quad \tilde{u}(\zeta) = u\left[\frac{1}{\zeta - z}\right]. \tag{28}$$

Für $\zeta \in \mathfrak{P}$ konvergiert für $h \to 0$

$$\left\{\frac{1}{h}\left\{\frac{1}{\zeta_1 - z_1}\cdots\frac{1}{\zeta_j + h - z_j}\cdots\frac{1}{\zeta_n - z_n} - \frac{1}{\zeta_1 - z_1}\cdots\frac{1}{\zeta_j - z_j}\cdots\frac{1}{\zeta_n - z_n}\right\}\right. \tag{29}$$
$$\left. = \frac{(-1)}{(\zeta_1 - z_1)\cdots(\zeta_j + h - z_j)(\zeta_j - z_j)\cdots(\zeta_n - z_n)}\right.$$

gleichmäßig auf einer Umgebung von $\mathfrak{P}^{\mathfrak{C}}$, also im Sinne von $\mathfrak{T}_1$ in $\mathfrak{A}(\mathfrak{P}^{\mathfrak{C}})$. $\tilde{u}(\zeta)$ ist also in $\mathfrak{P}$ analytisch, und analog wie oben sieht man, daß $\tilde{u}(\zeta)$ in den unendlichen Punkten von $\mathfrak{P}$ verschwindet. Die durch (28) gegebene Zuordnung $u \to \tilde{u}$ ist also eine Isomorphie von $\mathfrak{A}'(\mathfrak{P}^{\mathfrak{C}})$ und $\mathfrak{D}(\mathfrak{P})$. Da $\mathfrak{D}(\mathfrak{P})$ ein M-Raum ist, also jede beschränkte Menge relativ kompakt ist, folgt aus dem Satz von MACKEY-ARENS[13]), daß die starke Topologie $\mathfrak{T}_b$ in $\mathfrak{A}(\mathfrak{P}^{\mathfrak{C}})$ die feinste konvexe Topologie ist, die $\mathfrak{D}(\mathfrak{P})$ als dualen Raum ergibt. $\mathfrak{T}_b$ ist also insbesondere feiner als $\mathfrak{T}_1$. Andererseits sieht man leicht, daß $\mathfrak{T}_1$ feiner ist als

[13]) MACKEY, G. W. [6], [7], zitiert in [2], S. 64.

$\mathfrak{T}_b$: Ist $\mathfrak{M}$ eine beschränkte Menge in $\mathfrak{D}(\mathfrak{P})$, so gilt für alle Funktionen $f(z) \in \mathfrak{M}$ eine Abschätzung

$$(30) \qquad \|f\|_k = \sup_{z \in \overline{\mathfrak{P}}_k} |f(z)| \leq M_k, \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Die $\overline{\mathfrak{P}}_k$ können dabei als Zylindermengen $\overline{\mathfrak{D}}_{1,k} \times \cdots \times \overline{\mathfrak{D}}_{n,k}$ vorausgesetzt werden, wobei der Rand C_{jk} von $\overline{\mathfrak{D}}_{jk}$ rektifizierbar und von endlicher Länge $L_{j,k}$ ist. Wir setzen nun

$$(31) \qquad \varepsilon_k = \frac{(2\pi)^n}{M_k \cdot L_{1,k} \cdots L_{n,k}}.$$

Ist $\tilde{x}(z)$ regulär in $\mathfrak{P}_k^{\mathfrak{C}}$ und dort $|\tilde{x}(z)| \leq \varepsilon_k$, so gilt offenbar

$$(32) \qquad |x[f(z)]| \leq \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{C_{1,k} \times \cdots \times C_{n,k}} \cdots \int |f(\zeta) \cdot \tilde{x}(\zeta)| \cdot |d\zeta| \leq 1 \quad \text{für alle } f \in \mathfrak{M}.$$

Die zu $\mathfrak{M}$ polare Menge $\mathfrak{M}^0$ enthält also die $\mathfrak{T}_1$-Umgebung

$$(33) \qquad \mathfrak{U}_{\{\varepsilon_k\}} = \left\{ \tilde{y}(z) : \tilde{y}(z) = \sum \alpha_i \tilde{y}_i(z) \wedge \sum |\alpha_i| \leq 1 \wedge \|\tilde{y}_i\|_i = \sup_{z \in \mathfrak{P}_i^{\mathfrak{C}}} |\tilde{y}_i(z)| \leq \varepsilon_i \right\}.$$

Also muß $\mathfrak{T}_1$ mit der starken Topologie $\mathfrak{T}_b$ in $\mathfrak{A}(\mathfrak{P}^{\mathfrak{C}})$ übereinstimmen. Da $\mathfrak{D}(\mathfrak{P})$ als M-Raum reflexiv ist, also mit dem bidualen Raum übereinstimmt, ist die Topologie $\mathfrak{T}_0$ gleich der starken Topologie in $\mathfrak{D}(\mathfrak{P})$, und es ist bewiesen:

Satz 1 (Dualitätssatz)[14]. *Ist $\mathfrak{P} = \mathfrak{D}_1 \times \cdots \times \mathfrak{D}_n$ ein Zylinderbereich (offen), und $\mathfrak{P}^{\mathfrak{C}} = \mathfrak{C}\mathfrak{D}_1 \times \cdots \times \mathfrak{C}\mathfrak{D}_n$ so sind die Räume $\mathfrak{D}(\mathfrak{P})$ und $\mathfrak{A}(\mathfrak{P}^{\mathfrak{C}})$ zueinander stark dual. Die duale Paarung wird geliefert durch*

$$(34) \qquad \begin{cases} \langle \tilde{x}, \tilde{u} \rangle = \dfrac{1}{(2\pi i)^n} \displaystyle\int_{C^*} \cdots \int \tilde{x}(\zeta)\, \tilde{u}(\zeta)\, d\zeta = x[\tilde{u}] = (-1)^n u[\tilde{x}], \\ (\tilde{u} \in \mathfrak{D}(\mathfrak{P}), \tilde{x} \in \mathfrak{A}(\mathfrak{P}^{\mathfrak{C}})), \end{cases}$$

wobei C^* die Bestimmungsfläche eines Zylinderbereiches $\overline{\mathfrak{P}}^* \subset \mathfrak{P}$ ist, auf der $\tilde{x}(\zeta)$ noch regulär ist.

3. Lineare Funktionale als Randverteilungen.

Es seien $C_1, \ldots, C_n$ einfach geschlossene JORDAN-Kurven in der geschlossenen Zahlenebene und jedes endliche Teilstück eines C_j sei rektifizierbar. Nach Satz 1 ist jedes stetige lineare Funktional auf dem Raume $\mathfrak{A}(C) = \mathfrak{A}(C_1 \times \cdots \times C_n)$ durch eine in $C^{\mathfrak{C}} = \mathfrak{C}C_1 \times \cdots \times \mathfrak{C}C_n$ lokalanalytische Funktion definiert. Die Kurve C_j zerlegt die Zahlenkugel Ω in zwei Gebiete $\mathfrak{C}_j^0, \mathfrak{C}_j^1$, und $C^{\mathfrak{C}}$ ist der Bereich, der aus den 2^n Zylindergebieten

$$(35) \qquad \mathfrak{G}_\sigma = \mathfrak{C}_1^{\sigma_1} \times \mathfrak{C}_2^{\sigma_2} \times \cdots \times \mathfrak{C}_n^{\sigma_n}, \qquad \sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n), \qquad \sigma_j = \{^0_1$$

besteht. Es ist also

$$\mathfrak{D}(C^{\mathfrak{C}}) \equiv \prod_\sigma \mathfrak{D}(\mathfrak{G}_\sigma); \qquad \tilde{u}(\zeta) = \{\tilde{u}_\sigma(\zeta_\sigma)\}.$$

[14] Dieser Satz läßt sich auch aus einem allgemeineren Resultat von A. GROTHENDIECK [7] gewinnen, doch ist der obige direkte Beweis wesentlich einfacher.

Dabei ist in allen Räumen die Topologie $\mathfrak{T}_0$ zu nehmen. Jedes stetige lineare Funktional $u[x]$ auf $\mathfrak{A}(C)$ ist eindeutig zerlegbar in die Summe von 2^n Funktionalen $u_\sigma[x]$, deren Indikatrix $\tilde{u}_\sigma(\zeta)$ nur in $\mathfrak{G}_\sigma$ nicht identisch verschwindet. Nun erzeugt auch jedes $\tilde{y}(z) \in \mathfrak{A}(C)$ ein stetiges lineares Funktional auf $\mathfrak{A}(C)$:

$$y[x(z)] = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_C \cdots \int y(z) \cdot x(z)\, dz. \tag{36}$$

Ist C unendlich, so handelt es sich hierbei um ein uneigentliches Integral

$$y[x(z)] = \lim_{C_\nu^* \to C} \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{C_\nu^*} \cdots \int y(z)\, x(z)\, dz, \tag{37}$$

wobei $\{C_\nu^*\}$ eine monoton wachsende Folge von endlichen Abschnitten von C ist, die C (bis auf seine unendlichen Punkte) ausschöpfen. Da sowohl $y(z)$ als auch $x(z)$ im Unendlichen analytisch sind und dort verschwinden, existiert dieser Limes stets und ist unabhängig von der Ausschöpfungsfolge $\{C_\nu^*\}$. Für $|z_j| \geqq u_0$ ist $y(z) \cdot x(z)$ also analytisch und verschwindet von zweiter Ordnung:

$$|y(z) \cdot x(z)| \leqq \frac{M(z_1, \ldots, z_{j-1}, z_{j+1}, \ldots, z_n)}{|z_j|^2} \quad \text{für} \quad |z_j| \geqq n_0. \tag{38}$$

Sind nun ζ_j und ζ_j' zwei Punkte auf C_j mit $|\zeta_j| \geqq n_0$, $|\zeta_j'| \geqq n_0$, und ist $\hat{C}_j$ eine Kurve, die ζ_j und ζ_j' verbindet, so gilt:

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\hat{C}_j} y(z)\, x(z)\, dz_j \right| = \left| \int_{\zeta_j}^{r \cdot \zeta_j} y(z)\, x(z)\, dz + \int_{r \cdot \zeta_j}^{\zeta_j'} y(z)\, x(z)\, dz \right| \\ &\leqq \int_{\zeta_j}^{r \cdot \zeta_j} \frac{M}{|z_j|^2} |dz_j| + \int_{r \cdot \zeta_j}^{\zeta_j'} \frac{M}{|z_j|^2} |dz_j| \leqq M(z_1, \ldots, z_{j-1}, z_{j+1}, \ldots, z_n) \left(\frac{1}{|\zeta_j|} + \frac{\pi + 1}{|\zeta_j'|} \right) \\ &\leqq M(\ldots) \cdot \frac{\pi + 2}{n_0}. \end{aligned} \tag{39}$$

Das uneigentliche Integral

$$\int_{C_j} y(z) \cdot x(z)\, dz_j$$

existiert also und ist in den $z_i (i \neq j)$ eine analytische Funktion die in den unendlichen Punkten der C_i von zweiter Ordnung verschwindet, so daß die übrigen Integrationen auf die gleiche Weise durchgeführt werden können. Man kann das Integral $y[x(z)] = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_C \cdots \int y(z)\, x(z)\, dz$ offenbar auch so auswerten, daß man einen Abschnitt von C_j durch einen genügend großen Kreisbogen (Radius $> n_0$) zu einer endlichen geschlossenen Kurve schließt und über diese Kurve integriert. Auf diesem Wege sieht man am einfachsten die Stetigkeit des Funktionals $y[x(z)]$ ein. Man kann also $\mathfrak{A}(C)$ mit einem Teilraum seines dualen Raumes $\mathfrak{A}'(C)$ identifizieren.

Die Indikatrix

$$\tilde{y}_\sigma(\zeta) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_C \cdots \int y(z) \frac{1}{\zeta - z} dz, \qquad (\zeta \in \mathfrak{G}_\sigma),$$

von $y_\sigma[x]$ ist auch auf dem Rande von $\mathfrak{G}_\sigma$ noch regulär und verschwindet in den unendlichen Punkten, so daß $\tilde{y}_\sigma(\zeta)$ zu $\mathfrak{A}(C)$ gehört. Aus der CAUCHYschen Integralformel für $y(z)$ entnimmt man

$$y(z) = \sum_\sigma (-1)^{|\sigma|} \tilde{y}_\sigma(z), \qquad |\sigma| = \sum_1^n |\sigma_j|, \tag{40}$$

für z aus der Umgebung von C. Dabei ist die Bezeichnung so gewählt, daß $\mathfrak{C}_j^{\cdot}$ rechts, $\mathfrak{C}_j^1$ links von C_j liegt, wenn C_j im Sinne der Integration (36) durchlaufen wird. Da $\mathfrak{A}(\overline{\mathfrak{G}}_\sigma)$ zu $\mathfrak{D}(\mathfrak{G}_{\sigma'})$ mit $\sigma_j' = \sigma_j$ stark dual ist, ergibt sich, daß die durch (40) gegebene direkte Zerlegung von $\mathfrak{A}(C)$ auch topologisch ist.

Satz 2. *Es gilt die direkte topologische Zerlegung*

$$\mathfrak{A}(C) = \sum \oplus \mathfrak{A}(\overline{\mathfrak{G}}_\sigma).$$

Die topologischen Isomorphien

$$\mathfrak{A}'(C) \cong \mathfrak{D}(C^{\mathfrak{C}}), \qquad \mathfrak{D}'(C^{\mathfrak{C}}) \cong \mathfrak{A}(C)$$

setzen sich zusammen aus den topologischen Isomorphien

$$\mathfrak{A}'(\overline{\mathfrak{G}}_\sigma) \cong \mathfrak{D}(\mathfrak{G}_{\sigma'}), \qquad \mathfrak{D}'(\mathfrak{G}_\sigma) \cong \mathfrak{A}(\overline{\mathfrak{G}}_{\sigma'}).$$

Mit der Zerlegung $x(z) = \sum (-1)^{\sigma|} \tilde{x}_\sigma(z)$ *lautet die duale Paarung von* $\mathfrak{D}(C^{\mathfrak{C}})$ *und* $\mathfrak{A}(C)$:

$$u[x] = \sum_\sigma u_\sigma[(-1)^{|\sigma'|} \tilde{x}_{\sigma'}(z)] = \frac{(-1)^n}{(2\pi i)^n} \sum_\sigma \int_{C_{1,\sigma_1} \times \cdots \times C_{n,\sigma_n} \sim C} \cdots \int u_\sigma(\zeta)\, \tilde{x}_{\sigma'}(\zeta)\, d\zeta \text{ [15]}. \tag{41}$$

Für $C = C_1 \times \cdots \times C_n$ bezeichnen wir mit $\tau(C)$ die Anzahl der Kurven C_j, die durch den unendlichfernen Punkt gehen.

Satz 3. *Alle Räume* $\mathfrak{A}(C)$ *bzw. alle Räume* $\mathfrak{D}(C^{\mathfrak{C}})$ *die in dem Wert* $\tau(C)$ *übereinstimmen, sind zueinander topologisch isomorph.*

Beweis. Es genügt offenbar, die Isomorphie für die entsprechenden $\mathfrak{D}(\mathfrak{G}_\sigma)$ zu beweisen. $\mathfrak{G}_\sigma = \mathfrak{C}_1^{\sigma_1} \times \cdots \times \mathfrak{C}_n^{\sigma_n}$. $\tau_\sigma(C)$ sei die Anzahl der Gebiete $\mathfrak{C}_j^{\sigma_j}$, die den unendlichfernen Punkt enthalten. Jedes $\mathfrak{C}_j^{\sigma_j}$ läßt sich nun entweder auf das Innere des Einheitskreises analytisch abbilden, oder es läßt sich so auf das Äußere des Einheitskreises abbilden, daß der unendlichferne Punkt in sich übergeht und die Abbildung in allen anderen Punkten analytisch ist. Die entsprechenden Abbildungsfunktionen seien $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, und wir setzen $\mathfrak{R}_{\tau_\sigma} = \varphi_1(\mathfrak{C}_1^{\sigma_1}) \times \cdots \times \varphi_n(\mathfrak{C}_n^{\sigma_n})$. Da die abgeschlossenen Teilgebiete von $\mathfrak{R}_{\tau_\sigma}$ und $\mathfrak{G}_\sigma$ durch $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ einander eineindeutig zugeordnet werden, ist $\tilde{v}(\eta) \leftrightarrow \tilde{u}(\zeta) = \tilde{v}(\varphi(\zeta))$ eine topologische Isomorphie von $\mathfrak{D}(\mathfrak{R}_{\tau_\sigma})$ und $\mathfrak{D}(\mathfrak{G}_\sigma)$. Da die Menge der $\tau_\sigma(C)$ durch $\tau(C)$ eindeutig bestimmt ist, folgt die Isomorphie aller $\mathfrak{D}(C^{\mathfrak{C}})$

[15]) $C_{1,\sigma_1} \times \cdots \times C_{n,\sigma_n} \sim C$ soll bedeuten, daß C_{j,σ_j} im gleichen Sinne wie C_j orientiert sein soll.

lie in $\tau(C)$ übereinstimmen. Die Isomorphie der $\mathfrak{A}(C)$ ergibt sich dann durch Übergang zum dualen Raum.

Wir wollen die stetigen linearen Funktionale auf $\mathfrak{A}(C)$ nun als Größen, lie auf C selbst definiert sind, auffassen.

Satz 4. *Jedes stetige lineare Funktional $u[x(z)]$ auf $\mathfrak{A}(C)$ ist starker Limes iner Folge von Funktionalen $u_r[x]$, deren Indikatrix $\tilde{u}_r(\zeta)$ auf C stetige Rand-unktionen definiert. Das Funktional $u_r[x]$ ist durch die Randwerte von $\tilde{u}_r(\zeta)$ uf C eindeutig bestimmt. Man kann also die Funktionale $u[x]$ als eine Ver-llgemeinerung der Randwerte analytischer Funktionen auffassen.*

Beweis. Um den ersten Teil des Satzes zu beweisen, genügt es zu zeigen, laß jede Funktion aus $\mathfrak{D}(\mathfrak{G}_\sigma)$ im Sinne der Topologie $\mathfrak{T}_0$ approximiert werden ann durch Funktionen, die auf dem Rande von $\mathfrak{G}_\sigma$, insbesondere auf C, noch stetig sind.

Die Gebiete $\mathfrak{E}_j^{\sigma_j}$ können durch Funktionen $\varphi_j(\zeta)$ so auf das Innere bzw. Äußere des Einheitskreises analytisch abgebildet werden, daß die Abbildungen uf dem Rande in beiden Richtungen stetig sind. (Enthält $\mathfrak{E}_j^{\sigma_j}$ den unendlich-ernen Punkt, so soll er bei φ_j fest bleiben, liegt er auf dem Rande, so soll r in den Punkt $+1$ übergehen. Ist C_j analytisch, so kann die Abbildung φ_j uch auf dem Rande als analytisch vorausgesetzt werden.)

Für $\tilde{u}(\zeta) \in \mathfrak{D}(\mathfrak{G}_\sigma)$ ist $\tilde{v}(\eta) = \tilde{v}(\varphi_1(\zeta_1), \ldots, \varphi_n(\zeta_n)) = \tilde{u}(\zeta)$ regulär in

$$\mathfrak{R}_{\tau_\sigma} = \varphi(\mathfrak{G}_\sigma) = \varphi_1(\mathfrak{E}_1^{\sigma_1}) \times \cdots \times \varphi_n(\mathfrak{E}_n^{\sigma_n}). \tag{42}$$

Die „konzentrische Näherung" $\tilde{v}_r$ von $\tilde{v}$ sei definiert als

$$\tilde{v}_r(\eta_1, \ldots, \eta_n) = \tilde{v}(r^{\varrho_1} \cdot \eta_1, \ldots, r^{\varrho_n} \cdot \eta_n), \tag{43}$$

vobei $0 < r < 1$ und $\varrho_j = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases}$ ist, falls $\varphi_j(\mathfrak{E}_j^{\sigma_j})$ das $\begin{cases} \text{Innere} \\ \text{Äußere} \end{cases}$ des Einheitskreises st. $\tilde{v}_r(\eta)$ ist auf dem Rande von $\mathfrak{R}_{\tau_\sigma}$ noch analytisch. Aus der gleichmäßigen Stetigkeit und dem Maximumprinzip folgt, daß $\tilde{v}_r(\eta)$ auf jedem abgeschlos-enen Teilgebiet von $\mathfrak{R}_{\tau_\sigma}$ gleichmäßig gegen $\tilde{v}(\eta)$ konvergiert. Setzen wir nun die „konzentrische Näherung" von $\tilde{u}(\zeta)$ gleich

$$\begin{cases} \tilde{u}_r(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) = \tilde{v}_r(\varphi_1(\zeta_1), \ldots, \varphi_n(\zeta_n)) \\ \qquad = \tilde{u}(\varphi_1^{-1}(r^{\varrho_1} \cdot \varphi_1(\zeta_1)), \ldots, \varphi_n^{-1}(r^{\varrho_n} \cdot \varphi_n(\zeta_n))), \end{cases} \tag{44}$$

o ist $\tilde{u}_r(\zeta) \in \mathfrak{D}(\mathfrak{G}_\sigma)$ auf dem Rande von $\mathfrak{G}_\sigma$ noch stetig (im Falle analytischer C_j ist $\tilde{u}_r(\zeta)$ auf $\overline{\mathfrak{G}}_\sigma$ sogar noch analytisch) und konvergiert für $r \to 1 - 0$ im Sinne der Topologie $\mathfrak{T}_0$ gegen $\tilde{u}(\zeta)$. Die Funktionale $u_r[x]$ sind dann gegeben durch

$$\begin{cases} u_r[x(z)] = \sum\limits_\sigma u_{r,\sigma}[x] \\ = \dfrac{1}{(2\pi i)^n} \sum\limits_\sigma (-1)^{|\sigma} \int_{C_\sigma} \cdots \int \tilde{u}_{r,\sigma}(z)\, x(z)\, dz = \dfrac{(-1)^n}{(2\pi i)^n} \sum\limits_\sigma \int_{C_\sigma} \cdots \int \tilde{u}_{r,\sigma} \cdot x_{\sigma'}\, dz. \end{cases} \tag{45}$$

C_σ ist Produkt von Kurven C_{j,σ_j}, die ein Teilgebiet von $\mathfrak{C}_j^{\sigma_j}$ beranden und im gleichen Sinne wie C_j orientiert sind. Ist C_j endlich, so kann C_{j,σ_j} ohne Änderung des Integrals durch C_j ersetzt werden, da $\tilde{u}_{r,\sigma}$ auf $\overline{\mathfrak{G}}_\sigma$ noch stetig ist. Wenn C endlich ist, haben wir also mit $\tilde{u}_r(z) = \sum_\sigma (-1)^{|\sigma|} \tilde{u}_{r,\sigma}(z)$:

$$(46)\quad u_r[x(z)] = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_C \cdots \int \tilde{u}_r(z) \cdot x(z)\, dz = \frac{(-1)^n}{(2\pi i)^n} \sum_\sigma \int_C \cdots \int \tilde{u}_{r,\sigma}(z)\, x_{\sigma'}(z)\, dz$$

Sind nun $C_1, \ldots, C_\tau$ unendlich, $C_{\tau+1}, \ldots, C_n$ endlich, so können wir C_{j,σ_j} $(j \leqq \tau$ deformieren zu einer Kurve $C_j^*(\varrho)$, die aus einem endlichen Teilstück $C_j^0(\varrho$ von C_j mit Endpunkten auf dem Kreise um Null mit dem Radius ϱ und einem Bogen $C_j^1(\varrho)$ dieses Kreises besteht [ϱ ist so groß zu wählen, daß $x(z$ für $|z_j| \geqq \varrho$ analytisch ist]. Es ist nun

$$(47)\quad \int_{C_{1,\sigma_1}} \tilde{u}_{r,\sigma}(z) \cdot x(z)\, dz_1 = \int_{C_1^*(\varrho)} \tilde{u}_{r,\sigma} \cdot x\, dz_1 = \int_{C_1^0(\varrho)} \tilde{u}_{r,\sigma} \cdot x\, dz_1 + \int_{C_1^1(\varrho)} \tilde{u}_{r,\sigma} \cdot x\, dz_1.$$

Nun ist $\tilde{u}_{r,\sigma}(z)$ in $\overline{\mathfrak{G}}_\sigma$ stetig, so daß $\tilde{u}_{r,\sigma}(z_1, \ldots, z_n)$ für $z_1 \to \infty$ gegen $\tilde{u}_{r,\sigma}(\infty, z_2, \ldots, z_n)$ geht, und zwar gleichmäßig in $z_2, \ldots, z_n$. Es gilt also

$$(48)\quad |\tilde{u}_{r,\sigma}(z_1, z_2, \ldots, z_n) - \tilde{u}_{r,\sigma}(\infty, z_2, \ldots, z_n)| \leqq \varepsilon$$

für alle $(z_1, \ldots, z_n) \in \overline{\mathfrak{G}}_\sigma$ mit $|z_1| \geqq \varrho_0(\varepsilon)$. $x(z)$ besitzt im Unendlichen die Entwicklungen

$$(49)\quad x(z) = \frac{a_1(z_2, \ldots, z_n)}{z_1} + \frac{a_2(z_2, \ldots, z_n)}{z_1^2} + \cdots = \frac{a_1(z_2, \ldots, z_n)}{z_1} + \frac{x_1(z_1, \ldots, z_n)}{z_1^2}$$

$a_1(z_2, \ldots, z_n)$ ist analytisch in $C_2 \times \cdots \times C_n$ und $x_1(z_1, \ldots, z_n)$ in $\infty \times C_2 \times \cdots \times C_n$. ($a_1$ und x_1 verschwinden in den unendlichen Punkten von $C_2 \times \cdots \times C_n$.)

Aus (48) und (49) folgt also:

$$(50)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{C_1^1(\varrho)} \tilde{u}_{r,\sigma} \cdot x\, dz_1 = \tilde{u}_{r,\sigma}(\infty, z_2, \ldots, z_n) \cdot a_1(z_2, \ldots, z_n) \cdot \int_{C_1^1(\varrho)} \frac{dz_1}{z_1} \\ \qquad\qquad + P(z_2, \ldots, z_n; \varrho), \qquad \text{wobei} \\ P(z_2, \ldots, z_n, \varrho) = \displaystyle\int_{C_1^1(\varrho)} \{\tilde{u}_{r,\sigma}(z_1, \ldots, z_n) - \tilde{u}_{r,\sigma}(\infty, z_2, \ldots, z_n)\} \times \\ \qquad\qquad \times a_1(z_2, \ldots, z_n) \frac{dz_1}{z_1} + \displaystyle\int_{C_1^1(\varrho)} \tilde{u}_{r,\sigma}(z_1, \ldots, z_n) \cdot x_1(z_1, \ldots, z_n) \frac{dz_1}{z_1^2}. \end{cases}$$

Beide Glieder gehen aber für $\varrho \to \infty$ gleichmäßig gegen Null in einer abgeschlossenen Umgebung von $C_2 \times \cdots \times C_n$ in $\overline{\mathfrak{C}}_2^{\sigma_2} \times \cdots \times \overline{\mathfrak{C}}_n^{\sigma_n}$, da $a_1(z_2, \ldots, z_n)$, $x_1(z_1, \ldots, z_n)$ und $\tilde{u}_{r,\sigma}(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ dort beschränkt sind.

Es gilt also:

$$(51)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{C_{1,\sigma_1}} \tilde{u}_{r,\sigma}(z) \cdot x(z)\, dz_1 \\ = \displaystyle\lim_{\varrho \to \infty} \left\{ \int_{C_1^0(\varrho)} \tilde{u}_{r,\sigma}(z) \cdot x(z)\, dz_1 + \tilde{u}_{r,\sigma}(\infty, z_2, \ldots, z_n)\, a_1(z_2, \ldots, z_n) \cdot \int_{C_1^1(\varrho)} \frac{dz_1}{z_1} \right\}. \end{cases}$$

Da die Konvergenz in $z_2, \ldots, z_n$ gleichmäßig ist, kann diese Limesbildung mit den Integrationen über $C_{2,\sigma_2}, \ldots, C_{n,\sigma_n}$ vertauscht werden.

$$52) \quad \begin{cases} u_{r,\sigma}[x(z)] = \lim\limits_{\varrho\to\infty} \dfrac{(-1)^{|\sigma|}}{(2\pi i)^n} \displaystyle\int_{C_{2,\sigma_2}} \cdots \int_{C_{n,\sigma_n}} dz_2, \ldots, dz_n \times \\ \qquad \times \left\{ \displaystyle\int_{C_1^0(\varrho)} \tilde{u}_{r,\sigma} \cdot x(z)\, dz_1 + \tilde{u}_{r,\sigma}(\infty, z_2, \ldots, z_n) \cdot a_1(z_2, \ldots, z_n) \cdot \int_{C_1^1(\varrho)} \frac{dz_1}{z_1} \right\}. \end{cases}$$

Hierin kann man nun sukzessive auch die Integrale über C_{j,σ_j}, $(j \geqq 2)$ so umformen, wie es oben für $j = 1$ durchgeführt wurde. Man erhält so eine Darstellung von $u_{r,\sigma}[x]$, in die nur die Werte von $\tilde{u}_{r,\sigma}(z)$ auf C selbst eingehen.

Im Falle $n = \tau = 2$ ergibt sich so z. B.

$$53) \quad \begin{cases} \tilde{u}_{r,\sigma}[x(z)] = \lim\limits_{\varrho\to\infty} \dfrac{(-1)^{\sigma}}{(2\pi i)^2} \left\{ \displaystyle\int_{C_1^0(\varrho)\times C_2^0(\varrho)} \tilde{u}_{r,\sigma}(z_1, z_2)\, x(z_1, z_2)\, dz_1\, dz_2 + \right. \\ \quad + \displaystyle\int_{C_2^0(\varrho)} \tilde{u}_{r,\sigma}(\infty, z_2)\, a_1(z_2)\, dz_2 \cdot \int_{C_1^0(\varrho)} \frac{dz_1}{z_1} + \int_{C_1^0(\varrho)} \tilde{u}(z_1, \infty)\, a_2(z_1)\, dz_1 \int_{C_2^0(\varrho)} \frac{dz_2}{z_2} + \\ \quad \left. + \tilde{u}_{r,\sigma}(\infty, \infty) \cdot a_{1,2} \cdot \displaystyle\int_{C_1^1(\varrho)} \frac{dz_1}{z_1} \cdot \int_{C_2^1(\varrho)} \frac{dz_2}{z_2} \right\}, \end{cases}$$

wobei $a_1(z_2)$, $a_2(z_1)$, $a_{1,2}$ die Anfangskoeffizienten der Entwicklungen

$$\begin{aligned} x(z_1, z_2) &= \frac{a_1(z_2)}{z_1} + \cdots \\ &= \frac{a_2(z_1)}{z_2} + \cdots \\ &= \frac{a_{1,2}}{z_1 \cdot z_2} + \cdots \end{aligned}$$

von $x(z)$ nach negativen Potenzen von z_1, z_2 bzw. z_1 und z_2 für große z_i sind:

$$54) \quad \begin{cases} a_1(\alpha_2) = \mathrm{Res}_\infty\,(x(z_1, \alpha_2)) \\ a_2(\alpha_1) = \mathrm{Res}_\infty\,(x(\alpha_1, z_2)) \\ a_{1,2} = \mathrm{Res}_\infty\,(a_1(z_2)) = \mathrm{Res}_\infty\,(a_2(z_1)). \end{cases}$$

Wir machen nun für alles folgende die Voraussetzung, daß die C_j analytisch (im weiteren Sinne) seien. C_j soll also durch lineare Transformation aus einer endlichen, analytischen Kurve hervorgehen. Die Funktionen $\tilde{u}_{r,\sigma}(\zeta)$ sind dann auf C noch analytisch, und falls C noch endlich ist, folgt unmittelbar:

$\mathfrak{A}(C)$ ist in $\mathfrak{A}'(C)$ dicht. Bei unbeschränktem C gehören die $\tilde{u}_{r,\sigma}(\zeta)$ aber im allgemeinen nicht zu $\mathfrak{A}(C)$, da sie ja im Unendlichen nicht verschwinden müssen. Es gilt aber dennoch:

Satz 5. *Ist C analytisch (im weiteren Sinne), so ist $\mathfrak{A}(C)$ in $\mathfrak{A}'(C)$ dicht.*

Beweis. Die Funktion $\tilde{u}_{x,\sigma}(\zeta)$ ist auf C regulär. Wir multiplizieren sie nun mit einem Faktor, um das Verschwinden im Unendlichen zu erreichen. Sei

$$(55)\qquad \psi_{j,\varepsilon}(z_j)=\frac{1-z_j}{1+\varepsilon-z_j}=1-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon-z_j}\quad\text{und}\quad \psi_{\sigma,\varepsilon}(z)=\prod\psi_{j,\varepsilon}(\varphi_j(z_j)),$$

so verschwindet $\psi_{\sigma,\varepsilon}(z)$ in allen unendlichen Punkten von C und konvergiert für $\varepsilon\to 0$ in jedem abgeschlossenen Teilgebiet von $\mathfrak{G}_\sigma$ gleichmäßig gegen die Konstante 1. Es folgt hieraus, daß

$$(56)\qquad \tilde{u}_{r,\sigma,\varepsilon}(z)=\psi_{\sigma,\varepsilon}(z)\cdot\tilde{u}_{r,\sigma}(z)\in\mathfrak{A}(C)\cap\mathfrak{D}(\mathfrak{G}_\sigma)$$

für $r\to 1-0$ und $\varepsilon\to 0$ im Sinne der Topologie $\mathfrak{T}_0$ gegen $\tilde{u}_\sigma(z)$ konvergiert. Damit ist Satz 5 bewiesen, und wir haben für jedes stetige lineare Funktional auf $\mathfrak{A}(C)$ die Darstellung

$$(57)\qquad \begin{cases} u[x(z)]=\lim\limits_{r\to 1-0}\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_C\cdots\int\sum(-1)^{|\sigma|}\tilde{u}_{r,\sigma,\varepsilon}(z)\,x(z)\,dz \\ \qquad=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_C\cdots\int\sum\limits_\sigma(-1)^{|\sigma|}\tilde{u}_{1-\varepsilon,\sigma,\varepsilon}(z)\,x(z)\,dz. \end{cases}$$

4. Distributionen als Randverteilungen analytischer Funktionen.

Da $C=C_1\times\cdots\times C_n$ analytisch ist, kann man von Differenzierbarkeit und Differentiation einer auf C erklärten Funktion reden. $\mathfrak{E}(C)$ [16]) sei der Raum der beliebig oft differenzierbaren Funktionen auf C (die in den unendlichen Punkten nicht definiert zu sein brauchen). In $\mathfrak{E}(C)$ wird eine Topologie $\mathfrak{T}_\mathfrak{E}$ definiert durch das System der Umgebungen

$$(58)\qquad \mathfrak{V}(M,m,\varepsilon)=\left\{f(z):|D^p f(z)|=\left|\frac{\partial^p f(z)}{\partial z_1^{p_1}\dots\partial z_n^{p_n}}\right|\leq\varepsilon\quad\text{für}\quad |p|\leq m, z\in M\right\}.$$

M durchläuft dabei alle endlichen, kompakten Teilmengen von C, m alle natürlichen Zahlen und ε reelle Zahlen >0. Da jede auf C analytische Funktion beliebig oft differenzierbar ist, gilt $\mathfrak{A}(C)\subset\mathfrak{E}(C)$.

Satz 6. *Die Topologie $\mathfrak{T}_1$ von $\mathfrak{A}(C)$ ist feiner als die von $\mathfrak{T}_\mathfrak{E}$ induzierte Topologie auf $\mathfrak{A}(C)$.*

Beweis. $\overline{\mathfrak{M}}_k$ sei eine monotone Folge von abgeschlossenen Umgebungen von C mit $\bigcap\overline{\mathfrak{M}}_k=C$, $\overline{\mathfrak{M}}_k=\overline{\mathfrak{M}}_{k,1}\times\cdots\times\overline{\mathfrak{M}}_{k,n}$. Die Randdistanz der C_j in $\overline{\mathfrak{M}}_{k,j}$ sei $\geq\delta_k$. Die CAUCHYsche Koeffizientenabschätzung liefert dann für $|x(z)|\leq\varepsilon_k$ auf $\overline{\mathfrak{M}}_k$:

$$(59)\qquad |D^p x(z)|\leq\varepsilon_k\cdot\delta_k^{-p}\cdot p!\leq\varepsilon_k\,\delta_k^{-m}\cdot m!\quad\text{für}\quad |p|\leq m\quad\text{und}\quad z\in C\ [17]).$$

Mit $\varepsilon_k=\varepsilon\cdot\delta_k^m\cdot(m!)^{-1}$ gilt also für die Menge $\mathfrak{U}_{\varepsilon_k}^k$ aller $x(z)$ mit $\sup\limits_{z\in\overline{\mathfrak{M}}_k}|x(z)|\leq\varepsilon_k$:

$$(60)\qquad |D^p x(z)|\leq\varepsilon\quad\text{für}\quad |p|\leq m$$

[16]) Vgl. a. a. O. [4]) I, S. 88.

[17]) Dabei ist vorausgesetzt, daß $\delta_k\leq 1$ gewählt ist, was ja keine Einschränkung bedeutet.

und alle $z \in C$. Die gleiche Abschätzung gilt dann auch für die konvexe Hülle

$$\mathfrak{U}_{\{\varepsilon_k\}} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathfrak{U}_{\varepsilon_k}^{k}. \tag{61}$$

Es gilt also

$$\mathfrak{U}_{\{\varepsilon_k\}} < \mathfrak{B}(M, m, \varepsilon) \tag{62}$$

sogar für beliebiges M. $\mathfrak{T}_1$ ist also feiner als $\mathfrak{T}_{\mathfrak{E}}$.

Die stetigen linearen Funktionale auf dem Raume $\mathfrak{E}(C)$ sind die *„Distributionen mit kompaktem Träger"* auf C. Auf Grund von Satz 6 definiert jede solche Distribution T eine Randverteilung, d.h. ein stetiges lineares Funktional $T_1[x]$ auf $\mathfrak{A}(C)$. Wir zeigen nun, daß T durch T_1 vollständig festgelegt ist, so daß T und T_1 miteinander identifiziert werden können.

Satz 7. *$\mathfrak{A}(C)$ ist in $\mathfrak{E}(C)$ dicht bezüglich der Topologie $\mathfrak{T}_{\mathfrak{E}}$.*

Wir führen Satz 7 auf den Spezialfall, daß C direktes Produkt eines Torus $K^{n-\tau}$ und eines reellen Raumes R^{τ} ist, zurück durch

Satz 8: *Gehen genau τ der Kurven C_j durch den unendlichfernen Punkt, so ist $\mathfrak{E}(C)$ topologisch isomorph zu $\mathfrak{E}(R^{\tau} \times K^{n-\tau})$ ($K =$ Einheitskreis, $R =$ reelle Achse). Die Zuordnung kann so gewählt werden, daß dabei auch $\mathfrak{A}(C)$ auf $\mathfrak{A}(R^{\tau} \times K^{n-\tau})$ topologisch abgebildet wird.*

Beweis. Da C analytisch ist, gibt es eine analytische Abbildung φ von C auf $R^{\tau} \times K^{n-\tau}$, wobei die unendlichfernen Punkte der C_j fest bleiben. $\varphi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ ist in einer Umgebung von C regulär (d.h. φ_i bildet eine ganze Umgebung von C_j analytisch auf eine Umgebung von R_j bzw. K_j ab, wobei der Punkt ∞_j, falls er zu C_j gehört, fest bleibt). Da auf jedem endlichen kompakten Teil von C_j (bzw. $\varphi_j(C_j)$) alle Ableitungen von φ_j (bzw. φ_j^{-1}) beschränkt sind, ist die Zuordnung $x(z) \leftrightarrow \hat{x}(\eta) = x(\varphi^{-1}(\eta))$ ein topologischer Isomorphismus von $\mathfrak{E}(C)$ und $\mathfrak{E}(R^{\tau} \times K^{n-\tau})$. Dabei geht aber auch $\mathfrak{A}(C)$ in $\mathfrak{A}(R^{\tau} \times K^{n-\tau})$ über, und diese Abbildung ist topologisch bezüglich der Topologie $\mathfrak{T}_1$. Satz 8 ist also bewiesen.

Damit brauchen wir den Beweis von Satz 7 nur für den Fall $C = R^{\tau} \times K^{n-\tau} = R_1 \times \cdots \times R_{\tau} \times K_{\tau+1} \times \cdots \times K_n$ zu führen.

Beweis zu Satz 7. Sei eine Funktion $x(z) \in \mathfrak{E}(C)$ und eine Umgebung $\mathfrak{B}(M, m, \varepsilon)$ gegeben. Die kompakte Menge M ist enthalten in einer Menge $W = I_k \times K^{n-\tau}$, wenn I_k das Intervall $-k \leq z_j \leq +k$ im Raum R^{τ} ist. Man kann voraussetzen, daß M ganz im Innern dieser Menge W liegt. Als beliebig oft differenzierbare Funktion in W ist $x(z) = x(z_1, \ldots, z_{\tau}, e^{i\alpha_{\tau+1}}, \ldots, e^{i\alpha_n})$ in eine FOURIER-Reihe entwickelbar:

$$\left\{\begin{aligned} x(z) &= \sum_{\nu_1, \ldots, \nu_n = -\infty}^{+\infty} a_{\nu_1, \ldots, \nu_n} \exp\left(\frac{\pi i}{k}(\nu_1 z_1 + \cdots + \nu_{\tau} z_{\tau}) + i(\nu_{\tau+1}\alpha_{\tau+1} + \cdots + \nu_n \alpha_n)\right) \\ &= \sum_{-\infty}^{+\infty} a_{\nu_1, \ldots, \nu_n} \exp\left(\frac{\pi i}{k}(\nu_1 z_1 + \cdots + \nu_{\tau} z_{\tau})\right) \cdot z_{\tau+1}^{\nu_{\tau+1}} \ldots z_n^{\nu_n}. \end{aligned}\right. \tag{63}$$

Diese Reihe ist im Innern von W, also insbesondere in M, absolut und gleichmäßig konvergent mitsamt allen Ableitungen, die gliedweise gebildet werden können. Es gibt also eine Zahl N, so daß

$$x_N(z) = \sum_{-N}^{+N} a_{\nu_1,\dots,\nu_n} \exp\left(\frac{\pi i}{k}(\nu_1 z_1 + \cdots + \nu_\tau z_\tau)\right) z_{\tau+1}^{\nu_{\tau+1}} \cdots z_n^{\nu_n} \tag{64}$$

in $\mathfrak{B}\left(M, m, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ liegt. $x_N(z)$ ist eine analytische Funktion, die wir nun noch approximieren, durch Funktionen, die in den unendlichfernen Punkten verschwinden. In einer Umgebung von W gilt die Integralformel

$$x_N(z) = \frac{1}{(2\pi i)^\tau} \int \cdots \int \frac{x_N(\zeta_1, \dots, \zeta_\tau, z_{\tau+1}, \dots, z_n)}{(\zeta_1 - z_1) \cdots (\zeta_\tau - z_\tau)} d\zeta_1 \cdots d\zeta_\tau \tag{65}$$

und dieses Integral ist auf W gleichmäßig konvergent. Es gibt also eine Unterteilung des Integrationsweges, so daß gilt:

$$\left\{ \left| D^p \left\{ x_N(z) - \frac{1}{(2\pi i)^\tau} \sum x_N(\zeta_{1,\mu_1}, \dots, \zeta_{\tau,\mu_\tau}, z_{\tau+1}, \dots, z_n) \times \right.\right.\right. \tag{66}$$
$$\left.\left.\left. \times \frac{\Delta\zeta_{1,\mu_1} \cdots \Delta\zeta_{\tau,\mu_\tau}}{(\zeta_{1,\mu_1} - z_1) \cdots (\zeta_{\tau,\mu_\tau} - z_\tau)} \right\} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle p mit $|p| \leq m$ und alle $z \in M$.

Wir können dabei die Teilung auch so wählen, daß keiner der Teilpunkte eine rein reelle Koordinate ζ_{j,μ_j}, $(j \leq \tau)$ hat. Dann ist

$$x^*(z) = \frac{1}{(2\pi i)^\tau} \sum x_N(\zeta_{1,\mu_1}, \dots, \zeta_{\tau,\mu_\tau}, z_{\tau+1}, \dots, z_n) \cdot \frac{\Delta\zeta_{1,\mu_1} \cdots \Delta\zeta_{\tau,\mu_\tau}}{(\zeta_{1,\mu_1} - z_1) \cdots (\zeta_{\tau,\mu_\tau} - z_\tau)} \tag{67}$$

in $R^\tau \times K^{n-\tau}$ analytisch und verschwindet in allen unendlichen Punkten von $R^\tau \times K^{n-\tau}$. Da $x(z) - x^*(z)$ zu $\mathfrak{B}(M, m, \varepsilon)$ gehört, ist somit gezeigt, daß $\mathfrak{A}(R^\tau \times K^{n-\tau})$ in $\mathfrak{E}(R^\tau \times K^{n-\tau})$ dicht liegt. Für den allgemeinen Fall $C = C_1 \times \cdots \times C_n$ folgt dann diese Aussage aus Satz 8. Aus Satz 7 folgt nun unmittelbar:

Korollar. *Jede Distribution auf C mit kompaktem Träger ist Randverteilung auf C d.h. stetiges lineares Funktional auf $\mathfrak{A}(C)$.*

Denn aus Satz 7 folgt, daß jede solche Distribution auf C durch ihre Werte auf $\mathfrak{A}(C)$ vollständig bestimmt ist, also mit einem Element aus $\mathfrak{A}'(C)$ identifiziert werden kann.

Die nächste Aufgabe ist es nun, diejenigen Funktionen zu charakterisieren, die Distributionen als Randverteilungen haben. Es zeigt sich, daß dies gerade die „langsam gegen den Rand wachsenden" Funktionen sind, die im Unendlichen analytisch sind und dort verschwinden.

Definition. *$f(z_1, \dots, z_n)$ sei definiert in der Zylindermenge $\mathfrak{P} = \mathfrak{D}_1 \times \cdots \times \mathfrak{D}_n$. $\delta_j(z_j)$ sei die Randdistanz von z_j in $\mathfrak{D}_j$. $f(z)$ heißt „langsam gegen den Rand von $\mathfrak{P}$ wachsend", wenn es eine Abschätzung*

$$|f(z)| \leq \frac{M_0}{\delta_1^{\nu_1}(z_1) \cdots \delta_n^{\nu_n}(z_n)} \quad \text{mit} \quad \nu_j = \begin{cases} 1 & \text{falls } \delta_j(z_j) > 1 \\ k_j & \text{falls } \delta_j(z_j) \leq 1 \end{cases} \quad \text{gibt.}$$

Satz 9. *Die Distributionen mit kompaktem Träger auf C sind Randverteilungen analytischer Funktionen, die regulär sind in einer Zylindermenge* $\mathfrak{P} = \mathfrak{C}C_1^* \times \cdots \times \mathfrak{C}C_n^*$ *und langsam gegen den Rand von* $\mathfrak{P}$ *(d.h. gegen* $C_1^* \times \cdots \times C_n^*$*) wachsen. Dabei ist* C_j^* *ein endliches, kompaktes Teilstück von* C_j.

Beweis. Ist T stetig auf $\mathfrak{E}(C)$, so gibt es eine Umgebung $\mathfrak{V}(M, m, \varepsilon)$ auf der T beschränkt ist, d.h. es gilt $|T[x]| \leq M_0' \cdot \sup_{\substack{|p| \leq m \\ z \in M}} |D^p x(z)|$. Für die Indikatrix $t(\zeta) = T\left[\frac{1}{\zeta - z}\right]$ gilt also

$$(68)\quad |t(\zeta)| = \left|T\left[\frac{1}{\zeta - z}\right]\right| \leq M_0' \cdot \sup D^p \frac{1}{\zeta - z} = M_0' \cdot \sup \left| \frac{p_1! \cdots p_n!}{(\zeta_1 - z_1)^{p_1+1} \cdots (\zeta_n - z_n)^{p_n+1}} \right|.$$

$C_1^*, \ldots, C_n^*$ können nun so gewählt werden, daß $M < C_1^* \times \cdots \times C_n^*$. Dann ist also

$$(69)\quad \left\{ \begin{aligned} |t(\zeta)| &\leq \sup \left\{ \frac{M_0' \cdot m!}{(\zeta_1 - z_1)^{p_1+1} \cdots (\zeta_n - z_n)^{p_n+1}} \right\} \leq \frac{M_0}{\delta_1^{\nu_1}(\zeta_1) \cdots \delta_n^{\nu_n}(\zeta_n)} \\ &\text{mit } \nu_j = \begin{cases} m+1 & \text{für } \delta_j(\zeta_j) \leq 1. \\ 1 & \text{für } \delta_j(\zeta_j) > 1 \end{cases} \end{aligned} \right.$$

$t(\zeta)$ wächst also langsam gegen $C_1^* \times \cdots \times C_n^*$. Es bleibt nun zu zeigen, daß $t(\zeta)$ in $\mathfrak{P} = \mathfrak{C}C_1^* \times \cdots \times \mathfrak{C}C_n^*$ analytisch ist. Es seien nun $\{\zeta^{(\nu)}\}$ und $\{\tilde{\zeta}^{(\mu)}\}$ zwei Folgen von Punkten aus $\mathfrak{G}_\sigma$ und $\mathfrak{G}_{\tilde{\sigma}}$, die gegen einen Punkt $\zeta_0 \in \mathfrak{P}$ konvergieren. $g^{(\nu,\mu)}(z) = \frac{1}{\zeta^{(\nu)} - z} - \frac{1}{\tilde{\zeta}^{(\mu)} - z}$ konvergiert auf $C_1^* \times \cdots \times C_n^*$ gleichmäßig gegen Null, ebenso wie auch alle Ableitungen von $g^{(\nu,\mu)}(z)$. Infolgedessen muß auch $t_\sigma(\zeta^{(\nu)}) - t_{\tilde{\sigma}}(\tilde{\zeta}^{(\mu)}) = T[g^{(\nu,\mu)}(z)]$ gegen Null konvergieren. $t_\sigma(\zeta)$ und $t_{\tilde{\sigma}}(\zeta)$ sind also im Punkte ζ_0 noch stetig und haben den gleichen Grenzwert $t_\sigma(\zeta_0) = t_{\tilde{\sigma}}(\zeta_0) = t(\zeta_0)$. Aus dem Schwarzschen Spiegelungsprinzip folgt dann die Analytizität von $t(\zeta)$ in ζ_0.

$t(\zeta)$ ist also tatsächlich in dem Zylinderbereich $\mathfrak{P} = \mathfrak{C}C_1^* \times \cdots \times \mathfrak{C}C_n^*$ lokalanalytisch, und Satz 9 ist bewiesen.

Es bleibt nun die Umkehrung zu zeigen:

Satz 10. *Jede Funktion* $\tilde{u}(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$*, die in einem Zylinderbereich* $\mathfrak{P} = \mathfrak{C}C_1^* \times \cdots \times \mathfrak{C}C_n^*$ *lokalanalytisch und von langsamem Wachstum ist, hat als Randverteilung auf C eine Distribution mit kompaktem Träger. (Der Träger ist dann enthalten in* $C_1^* \times \cdots \times C_n^*$*.)*

Beweis. Wir können annehmen, daß $C_1, \ldots, C_\tau$ unendlich, $C_{\tau+1}, \ldots, C_n$ endlich seien $(0 \leq \tau \leq n)$. Das durch die in $\mathfrak{P}$ lokalanalytische Funktion $\tilde{u}(\zeta)$ definierte Funktional ist gegeben durch (34). Da $\tilde{u}(\zeta)$ im Unendlichen verschwindet, $\tilde{u}(\zeta) \cdot x(\zeta)$ dort also das Residuum Null hat, kann man die Kurvenpaare, die eine Umgebung von C_j, $(j \leq \tau)$, beranden, bei der Integration ersetzen durch eine beliebige endliche Kurve $\hat{C}$, die C_j^* in positivem

Sinne umläuft. Wir erhalten also

$$u[x(z)] = \frac{1}{(2\pi i)^n} \sum_{\sigma_{\tau+1}, \ldots, \sigma_n} \int \cdots \int_{\hat{C}_1 \times \cdots \times \hat{C}_n} \tilde{u}_\sigma(\zeta)\, x(\zeta)\, d\zeta\,, \tag{70}$$

wo alle $\hat{C}_j$ endlich sind und für $j > \tau$ aus zwei Kurven, sonst aus einer bestehen.

Wir zeigen nun, daß man von $\tilde{u}_\sigma$ durch Bildung gewisser unbestimmter Integrale zu Funktionen gelangt, die auf C selbst stetige Randwerte haben. Man gewinnt dadurch eine neue Darstellung des Funktionals $u[x]$, aus der sich unmittelbar entnehmen läßt, daß $u[x]$ bezüglich der Topologie $\mathfrak{T}_{\mathfrak{E}}$ stetig ist. Zugleich kann $u[x]$ auf Grund dieser Darstellung für alle Funktionen aus $\mathfrak{E}(C)$ definiert werden, da darin nur noch Integrale über Teile von C selbst auftreten.

Für $j > \tau$ sei ζ_j^0 ein Punkt, der im Innern von C_j liegt. Die Operation $\mathfrak{J}_j$ sei nun definiert durch

$$\begin{cases} \mathfrak{J}_j \tilde{u}_\sigma(\zeta) = \int\limits_{\zeta_j^0}^{\zeta} \tilde{u}_\sigma(\zeta)\, d\zeta_j & \text{falls } \mathfrak{C}_j^{\sigma_j} \text{ das Innere und} \\ \mathfrak{J}_j \tilde{u}_\sigma(\zeta) = \int\limits_{\infty}^{\zeta} \tilde{u}_\sigma(\zeta) \cdot (\zeta_j - \zeta_j^0)^{-1}\, d\zeta_j & \text{falls } \mathfrak{C}_j^{\sigma_j} \text{ das Äußere von } C_j \end{cases} \tag{71}$$

ist. Es sei nun

$$\tilde{u}_\sigma^{[0, \ldots, -\mu_{\tau+1}, \ldots, -\mu_n]}(\zeta) = \mathfrak{J}_{\tau+1}^{\mu_{\tau+1}} \cdots \mathfrak{J}_n^{\mu_n} \tilde{u}_\sigma(\zeta)\,; \qquad \mathfrak{J}_j^{k+1} \tilde{u}_\sigma = \mathfrak{J}_j (\mathfrak{J}_j^k \tilde{u}_\sigma)\,. \tag{72}$$

Aus der Abschätzung

$$|\tilde{u}(\zeta)| \leqq \frac{M_0}{\prod\limits_{j=1}^{n} \delta_j^{\nu_j}(\zeta_j)} \quad \text{mit} \quad \nu_j = \begin{cases} 1 & \text{für } \delta_j(\zeta_j) > 1 \\ k_j & \text{für } \delta_j(\zeta_j) \leqq 1 \end{cases}$$

folgt nun wenn $k_n > 1$ ist:

$$\begin{cases} |\mathfrak{J}_n(\tilde{u}(\zeta))| \leqq \dfrac{M_1}{\prod\limits_{j \neq n} \delta_j^{\nu_j}(\zeta_j) \cdot \delta_n^{k_n - 1}(\zeta_n)} & \text{für } \delta_n(\zeta_n) \leqq 1 \\ |\mathfrak{J}_n^{k_n - 1} \tilde{u}(\zeta)| \leqq \dfrac{M_{k_n - 1}}{\prod\limits_{j \neq n} \delta_j^{\nu_j}(\zeta_j) \cdot \delta_n(\zeta_n)}\,, \\ |\mathfrak{J}_n^{k_n} \tilde{u}(\zeta)| \leqq \dfrac{M_{k_n}}{\prod\limits_{j \neq n} \delta_j^{\nu_j}(\zeta_j)} \left(1 + \log \delta_n(\zeta_n)\right). \end{cases} \tag{73}$$

Das Integral $\int\limits_{\alpha}^{\beta} |\log \delta|\, |d\delta|$ geht aber mit $\alpha, \beta \to 0$ ebenfalls gegen Null, so daß $\mathfrak{J}_n^{k_n+1} \tilde{u}_\sigma(\zeta)$ eine stetige Grenzfunktion auf $\mathfrak{C}_1^{\sigma_1} \times \cdots \times \mathfrak{C}_{n-1}^{\sigma_{n-1}} \times C_n$ besitzt. Durch Fortsetzung des Prozesses erhält man das Resultat, daß $\mathfrak{J}_{\tau+1}^{k_{\tau+1}+1} \cdots \mathfrak{J}_n^{k_n+1} \tilde{u}_\sigma(\zeta)$ auf $\mathfrak{C}_1^{\sigma_1} \times \cdots \times \mathfrak{C}_\tau^{\sigma_\tau} \times C_{\tau+1} \times \cdots \times C_n$ eine stetige Grenzfunktion besitzt, die durch

$\frac{M_{k_{\tau+1}+1,\ldots,k_n+1}}{\prod\limits_{j\leq\tau}\delta_j^{\nu_j}(\zeta_j)}$ abgeschätzt wird. Definiert man nun $\mathfrak{S}_j^{-1}$ durch

$$(74)\qquad \begin{cases} \mathfrak{S}_j^{-1}\,x(\zeta) = x^{[0,\ldots,1_j,\ldots 0]_\sigma}(\zeta) = \dfrac{\partial\, x(\zeta)}{\partial\zeta_j} \quad \text{bzw.} \\ \mathfrak{S}_j^{-1}\,x(\zeta) = x^{[0,\ldots,1_j,\ldots 0]_\sigma}(\zeta) = \dfrac{\partial}{\partial\zeta_j}\{(\zeta_j-\zeta_j^0)\,x(\zeta)\}, \end{cases}$$

so gilt offenbar

$$(75)\qquad \begin{cases} \int\limits_{\hat{C}} \tilde{u}_\sigma(\zeta)\,x(\zeta)\,d\zeta = (-1)^{(k_{\tau+1}+1)+\cdots+k_n+1)} \int\limits_{\hat{C}} \tilde{u}_\sigma^{[0,\ldots,-k_{\tau+1}-1,\ldots,-k_n-1]}(\zeta)\times \\ \qquad\qquad \times x^{[0,\ldots,k_{\tau+1}+1,\ldots,k_n+1]_\sigma}(\zeta)\,d\zeta \end{cases}$$

und die Wege $\hat{C}_j$ kann man dabei auf C_j selbst verlegen für $j>\tau$. Für $j\leq\tau$ lassen sich die benötigten Integrale mit stetiger Grenzfunktion auf C_j (bzw. einem Teil von C_j) nicht mehr eindeutig definieren, da es keine Punkte im „Innern" von C_j gibt. Wir bezeichnen hier mit ζ_j^0 einen Punkt auf C_j, der aber nicht in C_j^* liegt. Wir können also annehmen, daß die Kurve $\hat{C}_j$, der Integrationsweg in (70), durch ζ_j^0 hindurchgeht. Wir definieren dann

$$(76)\qquad \mathfrak{S}_j\tilde{u}_\sigma^{[-\mu]}(\zeta) = \tilde{u}_\sigma^{[-\mu_1,\ldots,-\mu_j-1,\ldots,-\mu_n]}(\zeta) = \int\limits_{\zeta_j^0}^{\zeta_j}\tilde{u}^{[-\mu]}(\zeta)\,d\zeta_j.$$

(Der Weg von ζ_j^0 nach ζ_j ist dabei so zu wählen, daß er aus einem positiv durchlaufenen Stück von $\hat{C}_j$ und einer Kurve, die C_j nicht schneidet, besteht.) Wir erhalten dann aus den bisherigen Abschätzungen weiter:

$$(77)\qquad \left|\tilde{u}_\sigma^{[0,\ldots,-1_\tau,-k_{\tau+1}-1,\ldots,-k_n-1]}(\zeta)\right| \leq \frac{M_{1,k_{\tau+1}+1,\ldots,k_n+1}}{\prod\limits_{j<\tau}\delta_j^{\nu_j}(\zeta_j)\cdot\delta_\tau^{k_\tau-1}(\zeta_\tau)} \quad \text{für} \quad \delta_\tau(\zeta_\tau)\leq 1,$$

und schließlich ergibt sich, daß $\tilde{u}_\sigma^{[-k_1-1,\ldots,-k_n-1]}(\zeta)$ auf dem endlichen Teil von C (insbesondere also auf allen C_j soweit sie innerhalb der Integrationswege $\hat{C}_j$ liegen) eine stetige Grenzfunktion besitzt. Dabei ist die Approximation der Grenzfunktion gleichmäßig bei gleichmäßiger Annäherung an den Rand.

Durch wiederholte partielle Integration erhält man so

$$(78)\qquad \begin{cases} (2\pi i)^n\,u[x] = \sum\limits_{\sigma_{\tau+1},\ldots,\sigma_n} \int\cdots\int\limits_{\hat{C}_1\times\cdots\times\hat{C}_n} \tilde{u}_\sigma(\zeta)\cdot x(\zeta)\,d\zeta \\ = (-1)^{(k_{\tau+1}+1)+\cdots+(k_n+1)}\times \\ \quad \times \sum\limits_{\sigma_{\tau+1},\ldots,\sigma_n}(-1)^{\sigma_{\tau+1}+\cdots+\sigma_n} \int\cdots\int\limits_{\hat{C}_1\times\cdots\times\hat{C}_\tau\times C_{\tau+1}\times\cdots\times C_n} \tilde{u}_\sigma^{[0,\ldots,-(k_{\tau+1}+1),\ldots,-(k_n+1)]}(\zeta)\times \\ \quad \times x^{[0,\ldots,k_{\tau+1}+1,\ldots,k_n+1]_\sigma}(\zeta)\,d\zeta \\ = (-1)^{(k_{\tau+1}+1)+\cdots+(k_n+1)} \sum\limits_{\substack{p_1,\ldots,p_\tau \\ 0\leq p_j\leq k_j+1}} (-1)^{p_1+\cdots+p_\tau}\times \\ \quad \times \sum_\sigma (-1)^{|\sigma|}\int\cdots\int\limits_{C^0}\tilde{u}_\sigma^{[-p_1-d_{p_1},\ldots,-p_\tau-d_{p_\tau},-(k_{\tau+1}+1),\ldots,-(k_n+1)]}(\zeta)\times \\ \quad \times x^{[p_1,\ldots,p_\tau,k_{\tau+1}+1,\ldots,k_n+1]_\sigma}(\zeta)\cdot d\zeta^{(p)}. \end{cases}$$

Dabei soll $d_{p_j} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$ sein falls $p_j \begin{cases} = k_j + 1 \\ < k_j + 1 \end{cases}$ ist. $d\zeta^{(p)}$ soll andeuten, daß nicht über alle Veränderlichen mehr integriert werden soll, sondern nur über alle diejenigen ζ_j, für die $d_{p_j} = 0$, also $p_j = k_j + 1$ ist. Für die übrigen Variablen ist $\zeta_j = \zeta_j^0$ zu setzen. Da die Integranden auf $C^0 = C_1^0 \times \cdots \times C_\tau^0 \times C_{\tau+1} \times \cdots \times C_n$, dem Teil von C, der innerhalb des durch $\widehat{C}$ bestimmten, endlichen Zylindergebietes liegt, noch stetig sind, kann die Integration auf C^0 selbst durchgeführt werden. Es gehen also nur die Werte von $x(z)$ auf C^0 in die Berechnung von $u[x]$ ein.

Durch (78) kann also das Funktional $u[x]$ definiert werden für beliebige $x(z) \in \mathfrak{E}(C)$, ohne daß noch eine Approximation von $x(z)$ durch analytische Funktionen erforderlich ist. Zugleich sieht man dieser Darstellung unmittelbar an, daß sie ein bezüglich der Topologie $\mathfrak{T}_\mathfrak{E}$ auf $\mathfrak{E}(C)$ stetiges Funktional definiert, denn $u[x]$ ist offenbar auf der Umgebung $\mathfrak{B}(M, m, \varepsilon)$ beschränkt, sobald $C^0 < M$ und $m \geq \sum_1^n (k_j + 1)$ ist. Damit ist unser Satz bewiesen und darüber hinaus eine Formel zur Berechnung von $u[x]$ für beliebige Funktionen $x(z) \in \mathfrak{E}(C)$ gefunden.

Die in (78) auftretenden Integrale $\tilde{u}_\sigma^{[-\mu]}(\zeta)$ hängen noch von dem Anfangspunkt ζ_0 der Integration ab. Da ζ_j^0 in beliebiger Nachbarschaft von C_j^* gewählt werden kann, verschwindet $u[x]$ für alle Funktionen $x(z)$, die in einer Umgebung von C^* identisch verschwinden. Sei nun $\varphi_\varepsilon(z)$ eine Funktion aus $\mathfrak{E}(C)$, die in allen Punkten von C, die von C^* eine Entfernung $\leq \varepsilon$ haben, gleich 1 ist und in allen Punkten deren Entfernung von C^* größer als 2ε ist, verschwindet[18]). Dann muß nach (78) gelten:

$$(79) \quad \begin{cases} u[x(z)] = u[\varphi_\varepsilon(z) \cdot x(z)] \\ \qquad = \dfrac{(-1)^{\sum_1^n (k_j+1)}}{(2\pi i)^n} \sum_\sigma (-1)^{|\sigma|} \int_{C^0} \cdots \int \tilde{u}_\sigma^{[-k_1-1, \ldots, k_n-1]}(\zeta) \times \\ \qquad\qquad \times \{\varphi_\varepsilon(z) \cdot x(z)\}^{[k_1+1, \ldots, k_n+1]_\sigma} d\zeta_1 \ldots d\zeta_n . \end{cases}$$

Nachdem der Raum $\mathfrak{E}'(C)$ der Distributionen mit kompaktem Träger durch analytische Funktionen dargestellt ist, wäre es wünschenswert, daß man auch die starke Topologie in diesem Distributionenraum funktionentheoretisch definieren könnte, ohne dabei auf den dualen Raum bezugnehmen zu müssen.

Wir werden nun zunächst eine Topologie $\mathfrak{T}_2$ im Raume $E'(C)$ der langsam wachsenden Funktionen und damit auch in $\mathfrak{E}'(C)$ definieren, von der wir zeigen wollen, daß sie mit der starken Topologie $\mathfrak{T}_b$ übereinstimmt. Der erste Teil dieser Aussage, daß nämlich $\mathfrak{T}_2$ feiner ist als $\mathfrak{T}_b$ ergibt sich recht einfach. Da $\mathfrak{E}(C)$ ein M-Raum ist, gilt nach dem Satz von MACKEY-ARENS[19]), daß $\mathfrak{T}_b$ die feinste lokalkonvexe Topologie auf $\mathfrak{E}'(C)$ ist, die wieder $\mathfrak{E}(C)$ als dualen

[18]) Eine solche Funktion existiert immer, vgl. [8], Teil I, S. 23.

[19]) a. a. O. [13]).

Raum liefert. Es bleibt also dann noch zu zeigen, daß jedes $\mathfrak{T}_2$-stetige lineare Funktional durch eine beliebig oft differenzierbare Funktion definiert wird.

Die Topologie $\mathfrak{T}_2$:

Ist $C^* = C_1^* \times \cdots \times C_n^*$ eine endliche, kompakte Teilmenge von C und $m = (m_1, \ldots, m_n)$ ein n-Tupel natürlicher Zahlen, so sei $E'_{C^*,m}$ der Raum aller langsam wachsenden Funktionen, die in $C^{*\mathfrak{C}} = \mathfrak{C}C_1^* \times \cdots \times \mathfrak{C}C_n^*$ lokal-analytisch sind und für die das Integral $\tilde{u}_\sigma^{[-m]}(\zeta)$ stetige Randwerte auf C^* besitzt. Für den Fall eines unendlichen C_j soll C_j^0 die kleinste zusammenhängende Menge auf C_j sein, die C_j^* und den Anfangspunkt ζ_j^0 der Integration enthält. Wir machen $E'_{C^*,m}$ nun zu einem BANACHschen Raum mit der Norm[20])

$$(80)\quad \|\tilde{u}\|_{C^*,\zeta^0,m} = \sup_{\zeta \in C^0} |u_\sigma^{[-m]}(\zeta)|; \qquad \mathfrak{V}'(C^*, \zeta^0, m, \varepsilon) = \{\tilde{u} : \|\tilde{u}\|_{C^*,\zeta^0,m} \leq \varepsilon\}.$$

Da $E'(C) = \bigcup_{C^*,m} E'_{C^*,m}$[21]) ist, definieren wir die Topologie $\mathfrak{T}_2$ in $E'(C)$ durch die Umgebungen

$$(81)\quad \mathfrak{V}'_{\{C^*,\zeta^0,m,\varepsilon_{C^*,\zeta^0,m}\}} = \underset{C^*,m,\zeta^0(C^*)}{\Gamma} \mathfrak{V}'(C^*, \zeta^0, m, \varepsilon_{C^*,\zeta^0,m}).$$

Durch die Isomorphie $\tilde{u}(\zeta) \leftrightarrow u[x]$ wird die Topologie $\mathfrak{T}_2$ auch auf $\mathfrak{E}'(C)$ übertragen.

Satz 11. *Die Topologie $\mathfrak{T}_2$ ist feiner als die starke Topologie $\mathfrak{T}_b$ in $\mathfrak{E}'(C)$.*

Beweis. Sei $\mathfrak{M}$ eine beschränkte Menge aus $\mathfrak{E}(C)$. Es gibt dann zu jedem C^0 und jedem m eine Zahl $M'_{C^0,m}$, so daß $|D^p x(z)| \leq M'_{C^0,p}$ für alle $z \in C^0$. Da alle Ableitungen von $\varphi_\varepsilon = \varphi_{\varepsilon,C^*}$ auf C^0 beschränkt sind und $\zeta_j - \zeta_j^0$ dort ebenfalls endlich bleibt, gibt es eine andere Konstante $M_{C^0,m}$, so daß

$$(82)\quad |\{\varphi_{\varepsilon,C^*}(z) \cdot x(z)\}^{[m]}| \leq M_{C^0,m} \quad \text{für alle} \quad z \in C^0.$$

Die Umgebung $\mathfrak{V}'(C^*, \zeta^0, m, \varepsilon_{C^*,\zeta^0,m})$ ist dann nach (79) in der zu $\mathfrak{M}$ polaren Menge $\mathfrak{M}^0$ enthalten, wenn man $\varepsilon_{C^*,\zeta^0,m} \leq \frac{(2\pi)^n}{M_{C^0,m} \int_{C^0} |d\zeta|}$ macht. Da $\mathfrak{M}^0$ konvex ist, liegt also auch $\mathfrak{V}'_{\{C^*,\zeta^0,m,\varepsilon_{C^*,\zeta^0,m}\}}$ in $\mathfrak{M}^0$. Das heißt aber, daß $\mathfrak{T}_2$ feiner ist als $\mathfrak{T}_b$.

$\mathfrak{E}'(C)$ enthält insbesondere den Raum $\mathfrak{E}(C)$ der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger. In diesem Raum wird nach L. SCHWARTZ[22]) der folgende Konvergenzbegriff eingeführt: $\varphi_j(z)$ heiße konvergent gegen φ wenn alle φ_j außerhalb einer festen, endlichen, kompakten Menge verschwinden und wenn sie auf dieser Menge gleichmäßig konvergieren.

Satz 12. *Jedes $\mathfrak{T}_2$-stetige lineare Funktional $u[x]$ ist auf $\mathfrak{E}(C)$ stetig bezüglich der dort definierten Konvergenz.*

---

[20]) Diese Norm in $E'_{C^*,m}$ hängt zwar von der Wahl des Punktes $\zeta^0 = \zeta^0(C^*)$ ab. Die schließlich mit dieser Norm zu definierende Topologie $\mathfrak{T}_2$ wird davon aber wieder unabhängig.

[21]) Man kann sich dabei auf die Mengen $C^*_{(N)} = C \cap \{z : |z_j| \leq N\}$ beschränken.

[22]) Vgl. a. a. O. [4]) Teil I, S. 16.

Beweis. Sei φ_j konvergent gegen Null. Die Träger der $\varphi_j(z)$ sind enthalten in einer endlichen kompakten Teilmenge C^* von C und für $j > j_0(\varepsilon)$ gilt $|\varphi_j(z)| \leq \varepsilon$. Für die Indikatrix $\tilde{\varphi}_j(\zeta) = \varphi_j\left[\frac{1}{\zeta - z}\right] = \int_C \cdots \int \varphi_j(z)\,(\zeta - z)^{-1}\,dz$ erhält man die Abschätzung $|\tilde{\varphi}_j(\zeta)| \leq \varepsilon \cdot \int_{C^*} |d\zeta| \frac{1}{\delta_1(\zeta_1) \cdots \delta_n(\zeta_n)}$. $\tilde{\varphi}_j^{[-2,\ldots,-2]}(\zeta)$ hat also stetige Randwerte auf C^* und läßt sich auf $C^0 > C^*$ abschätzen durch $|\tilde{\varphi}^{[-2,\ldots,-2]}(\zeta)| \leq \varepsilon \cdot M$. Dabei hängt die Konstante M nur von C^* ab. Jedes $\mathfrak{B}'(C^*, \zeta^0, \{-2\}, \delta)$ enthält also schließlich alle φ_j, so daß diese auch bezüglich der Topologie $\mathfrak{T}_2$ konvergieren. Es gilt also $u[\varphi_j] \to 0$ d.h. u ist stetig auf dem Konvergenzraum $\mathfrak{E}(C)$.

Satz 13. *$\mathfrak{E}(C)$ ist in $\mathfrak{E}'(C)$ dicht bezüglich der Topologie $\mathfrak{T}_2$.*

Beweis. $\tilde{u}(\zeta)$ sei enthalten in $E'(C)$, also in einem geeigneten $E'_{C^*,m}$. $\tilde{u}(\zeta)$ kann dann durch beliebig oft differenzierbare Funktionen $\psi_{\varepsilon,\delta}(\zeta)$ mit Träger in C^0 approximiert werden, derart, daß folgendes gilt:

Es gibt eine Menge $\overline{C}$, $(C^* < \overline{C} < C^0)$, so daß auf $\overline{C}$

$$|\tilde{u}^{[-m]}(\zeta) - \psi_{\varepsilon\delta}(\zeta)| \leq \varepsilon \quad \text{und} \quad \int_{C^0 - \overline{C}} \cdots \int |d\zeta_1| \cdots |d\zeta_n| \leq \delta. \tag{83}$$

Durch einmalige Integration nach jeder Variablen erhält man dann

$$|\tilde{u}^{[-m-1]}(\zeta) - \psi_{\varepsilon,\delta}^{[-1]}(\zeta)| \leq \varepsilon \int_{C^0} \cdots \int |d\zeta_1| \cdots |d\zeta_n| + \delta \cdot \sup |\psi_{\varepsilon,\delta}(\zeta) - \tilde{u}^{[-m]}(\zeta)|. \tag{84}$$

Man kann von $|\psi_{\varepsilon,\delta}(\zeta)|$ noch voraussetzen, daß es überall kleiner als $|\tilde{u}^{[-m]}(\zeta)| + 1$ ist. Dann folgt aus (84):

$$|\tilde{u}^{[-m-1]}(\zeta) - \psi_{\varepsilon,\delta}^{[-1]}(\zeta)| \leq \varepsilon \cdot \int_{C_0} \cdots \int |d\zeta| + \delta(2\|\tilde{u}\|_{C^*,\zeta_0,m} + 1) \leq \varepsilon'. \tag{85}$$

ε' geht mit ε und δ auch gegen Null und es ist damit gezeigt, daß $\mathfrak{E}(C)$ in $\mathfrak{E}'(C)$ dicht liegt, denn

$$\tilde{u}(\zeta) - \psi_{\varepsilon,\delta}^{[+m]}(\zeta) \in \mathfrak{B}'(C^*, \zeta^0, m+1, \varepsilon') \tag{86}$$

und ε' kann beliebig klein gemacht werden. Satz 13 ist also bewiesen.

Die stetigen linearen Funktionale auf $\mathfrak{E}(C)$ sind aber gerade die Maße auf C. Jedes stetige lineare Funktional $u[x]$ auf $\mathfrak{E}'(C)$ definiert als stetiges Funktional auf $\mathfrak{E}(C)$ ein Maß μ und ist durch μ selbst vollständig bestimmt. Nun ist aber die Differentiation eine stetige Operation in $\mathfrak{E}'(C)$, so daß auch alle Ableitungen von μ noch Maße sind. Ist $\mu^{(p+2)}$ das durch $D^{p+2,\ldots,p+2}u[x]$ definierte Maß, so ist $\mu^{(p+1)}$ eine Funktion beschränkter Schwankung $\mu^{(p)}$ eine stetige Funktion und $\mu^{(0)}$ selbst eine nach jeder Variablen p-mal stetig differenzierbare Funktion. Da p aber beliebig war, muß μ eine unbeschränkt differenzierbare Funktion aus $\mathfrak{E}(C)$ sein. Nach MACKEY-ARENS stimmt also dann $\mathfrak{T}_2$ mit $\mathfrak{T}_b$ überein.

Literatur.

[1] Dieudonné, J.: La dualité dans les espaces vectoriels topologiques. Ann. Écol. Norm. Sup. **59**, 107—139 (1942). — [2] Dieudonné, J., et Schwartz, L.: La dualité dans les espaces (F) et (LF). Ann. Inst. Fourier **1**, 61—101 (1949). — [3] Grothendieck, A.: Sur certaines espaces de fonctions holomorphes. Erscheint im J. reine angew. Math. — [4] Köthe, G.: Dualität in der Funktionentheorie. Erscheint im J. reine angew. Math. — [5] Köthe, G.: Randverteilungen analytischer Funktionen. Math. Z. **57**, 13—33 (1952). — [6] Mackey, G. W.: On infinite dimensional linear spaces. Trans. Amer. Math. Soc. **57**, 155—207 (1945). — [7] Mackey, G. W.: On convex topological linear spaces. Trans. Amer. Math. Soc. **60**, 520—537 (1946). — [8] Schwartz, L.: Theorie des distributions, I und II. Actual. Sci. Industr. **1091**, **1122** (1950/51). — [9] Sebastião e Silva, J.: As funções analiticas e a Analise funcional. These, Lissabon (1948).

(Eingegangen am 30. Januar 1953.)

Mainz, Mathematisches Institut der Universität.

Lorenzen, P.
Math. Zeitschr. Bd. 59, S. 84—87 (1953)

Über die Komplettierung in der Bewertungstheorie.

Von
Paul Lorenzen.

Die Untersuchung der Fortsetzungen einer Bewertung eines Körpers kann man auf die Untersuchung der Fortsetzungen einer kompletten („perfekten") Bewertung reduzieren. Denn für einen komplett bewerteten Körper gilt der Satz von der eindeutigen Fortsetzbarkeit auf algebraische Oberkörper.

Die komplette Hülle eines bewerteten Körpers ist in Analogie zur Analysis definiert. Es kommt dadurch also ein der Algebra fremdes Element in die Algebra selbst hinein. Das Nichtalgebraische der Begriffsbildungen, die zur kompletten Hülle führen, zeigt sich unter anderem darin, daß die komplette Hülle überabzählbar (im naiven Sinne) ist.

Um für einen abzählbaren bewerteten Körper K einen Oberkörper $\overline{K}$ zu finden, derart, daß (1) sich die Bewertung von K auf $\overline{K}$ fortsetzen läßt und (2) für jeden algebraischen Oberkörper von $\overline{K}$ höchstens eine Fortsetzung der Bewertung von $\overline{K}$ existiert — dazu braucht man aber nicht über das Abzählbare hinauszugehen. Zu jedem abzählbaren bewerteten Körper K kann vielmehr (auf verschiedene Weise) ein abzählbarer Oberkörper $\overline{K}$ konstruiert werden, der die Bedingungen (1) und (2) erfüllt.

Für die Algebra liefert also auch die Bewertungstheorie keinen Anlaß über das Abzählbare hinauszugehen. (Bei dieser ganzen Betrachtung möge die Frage, ob dem „Überabzählbaren" überhaupt Existenz oder Sinn zukommt, unberührt bleiben.)

1. K sei ein (kommutativer) Körper und jedem Element a von K sei eine reelle Zahl $|a|$ zugeordnet, derart, daß gilt

$$|a| \geq 0$$
$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$
$$|a + b| \leq |a| + |b|$$
$$|a| = 0 \leftrightarrow a = 0.$$

Unter den Folgen aus Elementen von K seien gewisse Folgen ausgezeichnet, sie mögen „definite" Folgen heißen. K heiße dann „definit-komplett", wenn jede definite Fundamentalfolge konvergent ist.

M sei ein endlicher K-Modul, $\xi_1, \ldots, \xi_n$ sei eine K-Basis von M. Jedes Element α von M hat also eine eindeutige Darstellung

$$\alpha = a_1 \xi_1 + \cdots + a_n \xi_n.$$

M heißt K-bewertet, wenn jedem α eine reelle Zahl $|\alpha|$ zugeordnet ist, daß gilt

$$\left.\begin{aligned} |\alpha| &\geq 0 \\ |a\cdot\alpha| &= |a|\cdot|\alpha| \\ |\alpha+\beta| &\leq |\alpha|+|\beta| \\ |\alpha| &= 0 \leftrightarrow \alpha = 0. \end{aligned}\right\} \quad (a \in K)$$

Eine Folge $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ aus Elementen von M -- wir bezeichnen diese Folge durch $\Phi_i \alpha_i$ — heiße „definit", wenn die Folgen $\Phi_i a_{i\nu}$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ aus der Darstellung

$$\alpha_i = \sum_1^n{}_\nu a_{i\nu}\xi_\nu$$

definit sind.

2. Wir fragen uns jetzt, welche Bedingungen dem Begriff „definit" auferlegt werden könnten, damit der folgende Satz — aus dem die Existenz höchstens einer Fortsetzungsbewertung für algebraische Oberkörper leicht folgt — gilt:

Satz 1. Ist K definit-komplett, dann ist für eine K-Bewertung eines endlichen K-Moduls eine definite Folge $\Phi_i \alpha_i$ mit

$$\alpha_i = \sum_1^n{}_\nu a_{i\nu}\xi_\nu$$

genau dann Fundamentalfolge, wenn die Folgen $\Phi_i a_{i\nu}$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ konvergent sind.

Nennt man jede Folge definit, so kann der Beweis wie üblich (vgl. etwa VAN DER WAERDEN, Moderne Algebra, 3. Aufl. S. 268) geführt werden durch Induktion nach n. Für $n = 1$ ist der Satz trivial. Ist der Satz für $n-1$ bewiesen, so kommt es darauf an, für eine Fundamentalfolge $\Phi_i \alpha_i$, die Annahme $\Phi_i a_{in}$ sei nicht konvergent, zu widerlegen. Aus der Annahme folgt die Existenz eines $\varepsilon > 0$ und einer Teilfolge $\Phi_k a_{i_k n}$ von $\Phi_i a_{in}$ mit $\bigwedge_k |a_{i_{k+1}n} - a_{i_k n}| \geq \varepsilon$. Daher ist die Folge $\Phi_k \beta_k$ mit

$$\beta_k = \frac{\alpha_{i_{k+1}} - \alpha_{i_k}}{a_{i_{k+1}n} - a_{i_k n}} = \sum_1^{n-1}{}_\nu b_{k\nu}\xi_\nu + \xi_n$$

gegen 0 konvergent. Nach Induktionsvoraussetzung existiert $\lim_k b_{k\nu}$ $(\nu = 1, \ldots, n-1)$, woraus ein Widerspruch mit der linearen Unabhängigkeit der $\xi_1, \ldots, \xi_n$ folgt.

Dieser Beweis bleibt richtig für jeden Begriff „definit", wenn nur aus der vorausgesetzten Definitheit von $\Phi_i a_{i\nu}$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ auf die Definitheit von $\Phi_k a_{i_k n}$ und $\Phi_k b_{k\nu}$ geschlossen werden kann. Es liegt daher nahe, folgendes zu fordern:

(1) Die konstanten Folgen $\Phi_i a_i$ mit $a_i = a$ sind definit.

(2) Mit $\Phi_i a_i$ und $\Phi_i b_i$ sind auch $\Phi_i a_i + b_i$, $\Phi_i a_i \cdot b_i$ und $\Phi_i \frac{a_i}{b_i}$ (falls $\bigwedge_i b_i \neq 0$) definit.

(3) Gewisse Grundfolgen $\Phi_k i_k$, d.h. Folgen von natürlichen Zahlen i_k mit $k_1 < k_2 \to i_{k_1} < i_{k_2}$ heißen definit, derart, daß

(3.1) Mit $\Phi_i a_i$ und $\Phi_k i_k$ ist auch $\Phi_k a_{i_k}$ definit.

(3.2) Zu jeder definiten Folge $\Phi_i a_i$, die keine Fundamentalfolge ist, gibt es eine definite Grundfolge $\Phi_k i_k$ mit $\bigvee_\varepsilon \bigwedge_k |a_{i_{k+1}} - a_{i_k}| \geq \varepsilon$.

Diese Forderungen sind trivial erfüllbar dadurch, daß man nur die konstanten Folgen als definit auszeichnet (und beliebige, eventuell keine, Grundfolgen).

3. Um aber aus Satz 1 auf die Existenz höchstens einer Fortsetzungsbewertung für algebraische Oberkörper zu schließen, kommt man selbstverständlich nicht mit den konstanten Folgen aus. Für die Gültigkeit von

Satz 2: Gilt für zwei Bewertungen $|\ |_1$ und $|\ |_2$ die Äquivalenz

$$\lim_i |a_i|_1 = 0 \leftrightarrow \lim_i |a_i|_2 = 0$$

für alle definiten Folgen $\Phi_i a_i$, dann sind die Bewertungen äquivalent, d.h. $\frac{\log |a|_1}{\log |a|_2}$ ist konstant,

genügt nämlich der übliche Beweis (VAN DER WAERDEN l. c. S. 259), wenn alle Potenzfolgen $a, a^2, a^3, \ldots$ definit sind.

Man braucht ja nur $|a|_1 < 1 \leftrightarrow |a|_2 < 1$ zu zeigen. $|a| < 1$ ist aber äquivalent mit $\lim_i |a^i| = 0$. Um daher

Satz 3: Ist K definit-komplett, dann existiert für jeden algebraischen Oberkörper M höchstens eine Bewertung von M, die die Bewertung von K fortsetzt,

mit Hilfe von Satz 1 und Satz 2 erschließen zu können, ergänzen wir unsere Forderungen (1) bis (3) an den Begriff definit durch

(4) Für jeden einfach-algebraischen Oberkörper $K(\xi)$ von K vom Grade n und jedes Element α von $K(\xi)$ seien die Folgen $\Phi_i a_{i\nu}$ mit $\alpha^i = \sum_0^{n-1} a_{i\nu} \xi^\nu$ definit.

4. Der in der Einleitung genannte Satz, nämlich

Satz 4: Zu jedem abzählbaren bewerteten Körper K gibt es einen abzählbaren Oberkörper $\overline{K}$ derart, daß sich die Bewertung von $\overline{K}$ auf K fortsetzen läßt, und daß für jeden algebraischen Oberkörper M von $\overline{K}$ höchstens eine Bewertung von M existiert, die die Bewertung von $\overline{K}$ fortsetzt,

wird mit Satz 3 bewiesen sein, wenn zu jedem abzählbaren bewerteten Körper K ein abzählbarer Oberkörper $\overline{K}$ mit Fortsetzung der Bewertung von K konstruiert ist und gewisse Folgen von $\overline{K}$ als definit ausgezeichnet sind, derart, daß die Forderungen (1) bis (4) gelten und schließlich $\overline{K}$ definit-komplett ist.

Nach dem Muster der in meiner Arbeit zur Widerspruchsfreiheit der klassischen Analysis [Math. Z. **54**, 1 (1951)] angegebenen Schichtenkonstruktion läßt sich die Konstruktion von $\overline{K}$ leicht durchführen. Dazu braucht hier aber auf die „Aussageformen" nicht eingegangen zu werden.

Zu dem abzählbaren Körper K ist zunächst eine abzählbare Menge D von Folgen und Grundfolgen als die Menge der definiten Folgen zu definieren.

Die kleinste Menge von Folgen, die (1), (2) und (4) erfüllt, ist jedenfalls abzählbar. Um auch (3) mit einer abzählbaren Menge D von definiten Folgen und von definiten Grundfolgen erfüllen zu können, ordnen wir jeder Folge $\Phi_i a_i$, die keine Fundamentalfolge ist, genau eine Grundfolge $\Phi_k i_k$ zu mit $\bigvee_\varepsilon \bigwedge_k |a_{i_{k+1}} - a_{i_k}| \geqq \varepsilon$. Ist $\Phi_i a_i$ keine Fundamentalfolge, so bestimme man dazu, das kleinste ganze $n \geqq 0$ mit

$$\bigwedge_k \bigvee_{j>k} |a_j - a_k| \geqq 2^{-n}.$$

j_k sei das kleinste j mit $j > k$ und $|a_j - a_k| \geqq 2^{-n}$. Schließlich sei durch $i_1 = 1$

$$i_{k+1} = j_{i_k}$$

die $\Phi_i a_i$ zugeordnete Grundfolge $\Phi_k i_k$ definiert. Ersetzen wir (3.2) durch die Forderung, daß mit jeder definiten Folge, die nicht Fundamentalfolge ist, auch die zugeordnete Grundfolge definit sei, so sieht man, daß auch (1) bis (4) durch eine abzählbare Menge D von definiten Folgen und Grundfolgen erfüllt werden kann. Hierdurch ist für jeden abzählbaren bewerteten Körper K eine abzählbare Menge $D(K)$ definiter Folgen und Grundfolgen definiert. Wir konstruieren nun einen abzählbaren Oberkörper K_1 von K, indem wir alle definiten Fundamentalfolgen, die nicht konvergent sind, zu K hinzunehmen (von kongruenten Folgen $\Phi_i a_i$ und $\Phi_i b_i$ — d. h. mit $\lim_i |a_i - b_i| = 0$ — allerdings nur eine!).

Die Bewertung von K läßt sich auf K_1 fortsetzen und die Fundamentalfolgen aus $D(K)$ sind in K_1 konvergent. Wir konstruierten eine Körperkette

$$K \subseteqq K_1 \subseteqq K_2 \subseteqq \ldots,$$

so daß in K_{n-1} die Fundamentalfolgen aus $D(K_n)$ konvergent sind. Setzen wir

$$\overline{K} = \bigcup_n K_n,$$

so ist auch $\overline{K}$ abzählbar. Es gilt

$$D(\overline{K}) \subseteqq \bigcup_n D(K_n)$$

und $\overline{K}$ ist daher definit-komplett. Damit ist Satz 4 bewiesen.

5. Es sei zum Schluß bemerkt, daß die Untersuchungen in 1. bis 4. unabhängig vom Begriff der reellen Zahl durchgeführt werden könnten. Man brauchte ja von den Werten nur zu fordern, daß sie einem archimedisch angeordneten Körper angehören. Ist K abzählbar, dann braucht auch der Wertekörper nur abzählbar zu sein. Zur Fortsetzung der Bewertung von K auf $\overline{K}$ muß der Wertekörper eventuell erweitert werden, aber selbstverständlich genügen hier stets abzählbare Erweiterungen.

Bonn, Luisenstr. 3.

(Eingegangen am 4. Januar 1953.)

SHAH, S. M., and S. K. SINGH
Math. Zeitschr. Bd. 59, S. 88—93 (1953)

Borel's Theorem on a-points and exceptional values of Entire and Meromorphic Functions.

By
S. M. SHAH and S. K. SINGH.

1. Let $f(z)$ be an entire function of finite order. If α is a Borel exceptional value (B.e.v.), of $f(z)$, that is, if

$$\varrho_1(\alpha) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\overset{+}{\log} n(r,\alpha)}{\log r} < \varrho = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log\log M(r)}{\log r},$$

then ϱ is necessarily an integer and $f(z)$ can have no other e.v.B. or N. An analogy with this result would suggest that there can be at most one value α such that

$$\lambda_1(\alpha) = \liminf_{r\to\infty} \frac{\overset{+}{\log} n(r,\alpha)}{\log r} < \lambda = \liminf_{r\to\infty} \frac{\log\log M(r)}{\log r} \tag{1}$$

and that when α exists such that (1) holds, then ϱ or λ must be integer. We show that this analogy is false. R. C. YOUNG [*10*; 194-5] has indicated a method to construct a function for which (1) holds for more than one α but this method depends on the existence of a number Θ_0 about which nothing more than its existence with a certain property [if $g(z)$ is of very regular growth then $n(r, g-\Theta_0) > K \log M(r, g)$] is known. (See theorem c 2 [*10*], 189.) We avoid any application of this theorem and give a direct proof of the result $\lambda_1(-a_r) < \lambda$ $(r = 1, 2, \ldots, k)$ for the function $f(z)$ given below [§ 3, theorem 1 (ii)].

2. Let $\Phi(x)$ be an increasing function of x such that $\int_a^\infty \frac{dx}{x\Phi(x)}$ is convergent and let E denote the set of functions $\Phi(x)$. Define α to be an exceptional value (e.v.) E of a meromorphic function $F(z)$ if

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{T(r)}{n(r,\alpha)\,\Phi(r)} > 0$$

for some $\Phi(r) \subset E$. It is known [*5*] that if $F(z)$ is of finite order and has 0 and ∞ as e.v. E then $T(r,F) \sim T(r,F')$ and this result holds if $F(z)$ has α $(|\alpha| < \infty)$ and ∞ as e.v. E. We prove here that this result holds under less restrictive hypothesis.

Theorem 2. *If $F(z)$ is a meromorphic function of finite order and if $\delta(\alpha) = \delta(\infty) = 1$, $|\alpha| < \infty$ then $T(r,F') \sim T(r,F)$ as $r \to \infty$. Here $\delta(x) = \delta(x,F)$ denotes Nevanlinna deficiency of the value x* [*3*; 79].

Theorem 3. *If $F(z)$ is a meromorphic function of finite order and if $\alpha_1 \neq \alpha_2$, $|\alpha_1| < \infty$, $|\alpha_2| < \infty$, $\delta(\alpha_1) = \delta(\alpha_2) = 1$ then $T(r,F') \sim 2\,T(r,F)$ as $r \to \infty$.*

Corollary. *If $F(z)$ is a meromorphic function of finite order and has two finite e.v. E then $T(r,F') \sim 2T(r,F)$.*

Theorem 4. *If $F(z)$ is a meromorphic function of finite order having α ($|\alpha| < \infty$) and ∞ as e.v. E then $F^{(k)}(z)$ has 0 and ∞ as e.v. E.*

Theorem 5. *If $F(z)$ is a meromorphic function of finite order having two finite e.v. E then $F'(z)$ has 0 as e.v. E and no other e.v. E.*

Analogous results on N e.v. of $F'(z)$ can be proved (see [1], [2]). We can also prove with the help of theorems 4 and 5 above and theorem 3 of [5] the following results on B.e.v. of $F'(z)$.

I. If $F(z)$ is a meromorphic function of finite order and has 0 and 1 as B.e.v. then $F'(z)$ has 0 as the only B.e.v.

II. If $F(z)$ is a meromorphic function of finite order and has 0 and ∞ as B.e.v., then $F^{(k)}(z)$ has 0 and ∞ as B.e.v.

3. Theorem 1. (i) *Given ϱ an irrational positive number, there exists an entire function $f(z)$ of order ϱ for which $\lambda_1(0) < \lambda$ and λ is non-integer.*

(ii) *There exists an entire function $f(z)$ for which $\lambda_1(-a_r) < \lambda$ ($r = 1, 2, \ldots, k$).*

Proof. (i) Let $k = 1 + [\varrho]$, $a_0 = 0$, $a_n = 2^{2^{n-1}}$ $(n \geq 1)$

$$\xi_n = [a_n^{\varrho/k}] - [a_{n-1}^{\varrho/k}],$$

$$f(z) = \prod_1^\infty \left\{1 + \frac{z^k}{a_n}\right\}^{\xi_n}.$$

Then $f(z)$ is a canonical product of order ϱ for which [6; 65] $\lambda_1(0) = \varrho/2$, $\lambda = \varrho/\{2 - (\varrho/k)\}$. Hence

$$\varrho = \frac{2\lambda}{1 + \left(\frac{\lambda}{k}\right)}$$

and so λ is an irrational number.

(ii) Let $k > 1$ be integer; $a_1, a_2, \ldots, a_k$ be integers (positive or negative or zero) distinct from each other;

$$\lambda_1 = 2, \qquad \lambda_{n+1} = \lambda_n^{k+1} \qquad (n \geq 1), \qquad \Theta_0 = \tfrac{1}{2}, \qquad \Theta_1 = \Theta_2 = 1,$$

$\Theta_n = a_1$ when n lies in the interval $\lambda_m < n \leq \lambda_m^2$

$= a_2$ when n lies in the interval $\lambda_m^2 < n \leq \lambda_m^3$

.....

$= a_k$ when n lies in the interval $\lambda_m^k < n \leq \lambda_m^{k+1}$

$$(m = 1, 2, \ldots),$$

$$g_\nu(z) = a_\nu + \sum_1^\infty \frac{a_\nu - \Theta_n}{n!} z^n \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, k),$$

$$f(z) = -e^{-z} \sum_0^\infty \frac{\Theta_n}{n!} z^n.$$

Then $g_\nu(z)$ and $f(z)$ are entire functions and $\varrho(g_\nu)=1$,

$$(g_\nu(z)-\Theta_0)\,e^{-z}=f(z)+a_\nu. \tag{2}$$

Also

$$M(r,f)\leq Ke^{2r}, \tag{3}$$

and if we write $f(z)=\sum_0^\infty A_n z^n$ then

$$\begin{aligned}|A_n| &= \left|\frac{\Theta_n}{n!}-\frac{\Theta_{n-1}}{(n-1)!\,1!}+\frac{\Theta_{n-2}}{(n-2)!\,2!}-\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}\Theta_0\right| \\ &= \frac{1}{n!}\left|\left\{\Theta_n-\frac{n}{1}\Theta_{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}\Theta_{n-2}-\cdots+(-1)^{n-1}n\,\Theta_1\right\}+(-1)^n\Theta_0\right| \\ &\geq \frac{1}{2n!}.\end{aligned}$$

Since [7; theorem 1]

$$\lambda(f)\geq \liminf_{n\to\infty}\frac{n\log n}{\log\frac{1}{|A_n|}},$$

we have $\lambda(f)\geq 1$ and hence from (3), $\lambda(f)=\varrho(f)=1$. Further from (2)

$$n(r,f+a_\nu)=n(r,g_\nu-\Theta_0)$$

and

$$g_\nu(z)-\Theta_0=\sum_0^\infty\frac{a_\nu-\Theta_n}{n!}z^n.$$

Now $\Theta_n=a_\nu$ for $\lambda_m^\nu<n\leq\lambda_m^{\nu+1}$. Hence [9; theorem 3]

$$\lambda(g_\nu-\Theta_0)\leq\liminf_{m\to\infty}\frac{\log\lambda_m^\nu}{\log\lambda_m^{\nu+1}}=\frac{\nu}{\nu+1}$$

and so

$$\lambda_1(-a_\nu)=\liminf_{r\to\infty}\frac{\log n(r,f+a_\nu)}{\log r}\leq\frac{\nu}{\nu+1}<\lambda(f).$$

4. Proof of theorem 2. We may suppose $\alpha=0$. Then [3; 104]

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{T(r,F')}{T(r,F)}\leq 2-\mu(\infty)-\delta(\infty)\leq 1.$$

Further [1; 12]

$$\begin{aligned}T(r,F') &> N(r,F')+N\left(r,\frac{1}{F'}\right)+T(r,F)-2N(r,F) \\ &\quad -N\left(r,\frac{1}{F}\right)+O(\log r) \\ &> T(r,F)+\circ\left(T(r,F)\right)\end{aligned}$$

and hence $T(r,F')\sim T(r,F)$ as $r\to\infty$.

5. Proof of theorem 3. We have [3; 98]

$$T(r,F) \leq \overline{N}\left(r, \frac{1}{F-\alpha_1}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{F-\alpha_2}\right) + \overline{N}(r,F) + O(\log r)$$
$$\leq \circ\,(T(r,F)) + \overline{N}(r,F).$$

Hence

$$\overline{N}(r,F) \sim T(r,F) \tag{4}$$

$$\frac{T(r,F')}{T(r,F)} \geq \frac{\overline{N}(r,F) + N(r,F)}{T(r,F)} \sim 2.$$

But [3; 104]

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{T(r,F')}{T(r,F)} \leq 2,$$

and hence $T(r,F') \sim 2T(r,F)$.

The corollary follows immediately from the theorem, since if α is an e.v. E then $\delta(\alpha) = 1$.

6. Proof of theorem 4. We may suppose $\alpha = 0$; then

$$n(r,F'-\infty) \leq 2n(r,F-\infty),$$

and since 0, ∞ are e.v. E of $F(z)$, $T(r,F) \sim A\,r^{\varrho}$ [4; theorem 8]

$$T(r,F) \sim T(r,F')$$

[5; theorem 6]. Hence

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{T(r,F')}{n(r,F'-\infty)\,\Phi(r)} \geq \frac{1}{2} \liminf_{r\to\infty} \frac{T(r,F)}{n(r,F-\infty)\,\Phi(r)} > 0$$

for some $\Phi(r) \subset E$ and so ∞ is an e.v. E of $F'(z)$.

Further [3; 105]

$$N\left(r, \frac{1}{F'}\right) < 2\left\{N(r,F) + N\left(r, \frac{1}{F}\right)\right\} + O(\log r).$$

Now[1])

$$n(r,F-0) < \frac{A\,r^{\varrho}}{\Phi(r)}, \qquad n(r,F-\infty) < \frac{A\,r^{\varrho}}{\Phi(r)}$$

for some $\Phi(r) \subset E$. Further given $\Phi(r) \subset E$, we can find another function (see lemma 1, [8]) $\Psi(x) \subset E$ such that $\Psi(x) \leq \Phi(x)$ and $\frac{\Psi(x)}{x^{\beta}} \downarrow$, β being some positive constant less than unity. Hence

$$N(r,F) + N\left(r, \frac{1}{F}\right) < A\int_a^r \frac{x^{\varrho-1}\,dx}{\Phi(x)} < A\int_a^r \frac{x^{\varrho-1}\,dx}{\Psi(x)} < \frac{A\,r^{\varrho}}{\Psi(r)},$$

$$N\left(r, \frac{1}{F'}\right) < \frac{A\,r^{\varrho}}{\Psi(r)},$$

$$n(r,F'-0)\log 2 < N\left(2r, \frac{1}{F'}\right) < \frac{A\,r^{\varrho}}{\Psi(2r)} \leq \frac{A\,r^{\varrho}}{\Psi(r)},$$

and so

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{T(r,F')}{n(r,F'-0)\,\Psi(r)} > 0.$$

[1]) A denotes a positive constant not necessarily the same at each occurrence.

Hence 0 is an e.v. E of $F'(z)$. The argument can be repeated and the theorem follows.

7. Proof of theorem 5. We have

$$N(r, F') = N(r, F) + \bar{N}(r, F)$$

and from (4)

$$N(r, F) + \bar{N}(r, F) \sim 2T(r, F) \sim T(r, F')$$

and so

$$\delta(\infty, F') = 0.$$

Hence ∞ is not an e.v. N of $F'(z)$ and a fortiori not an e.v. E.

We may suppose that 0 and 1 are e.v. E of $F(z)$. Consider

$$G(z) = \frac{F(z)}{1 - F(z)}.$$

$G(z)$ has 0 and ∞ as e.v. E. So by theorem 4, $G'(z)$ has 0 and ∞ as e.v. E; and

$$F'(z) = \frac{G'(z)}{(G(z)+1)^2},$$

$$n(r, F' - 0) < n(r, G' - 0) + 2n(r, G - \infty) < \frac{A r^{\varrho}}{\Phi(r)}$$

for some $\Phi(r) \subset E$. Since $T(r, F') \sim A_1 r^{\varrho}$

$$\liminf_{r \to \infty} \frac{T(r, F')}{n(r, F' - 0)\, \Phi(r)} > \lim_{r \to \infty} \frac{A_1 r^{\varrho}}{A r^{\varrho}} > 0$$

and so 0 is an e.v. E of $F'(z)$. Further [2]

$$T(r, F') < N(r, F) + N\left(r, \frac{1}{F}\right) + N\left(r, \frac{1}{F' - 1}\right) + N\left(r, \frac{1}{F'}\right) + O(\log r).$$

Suppose if possible 1 is an e.v. E of $F'(z)$. Then

$$T(r, F') \sim 2T(r, F),$$

$$N(r, F) \sim T(r, F),$$

$$N\left(r, \frac{1}{F}\right) = o\left(T(r, F)\right),$$

$$N\left(r, \frac{1}{F' - 1}\right) = o\left(T(r, F)\right),$$

$$N\left(r, \frac{1}{F'}\right) = o\left(T(r, F)\right),$$

and so we have a contradiction. Hence 1 is not an e.v. E of $F'(z)$ and 0 is the only e.v. E of $F'(z)$.

References.

[1] Milloux, H.: Les Fonctions Meromorphes et leurs Derivees, XIV. Paris 1940. — [2] Milloux, H.: Sur le Theorie des defauts. C. R. Acad. Sci. Paris **210**, 38—39. — [3] Nevanlinna, R.: Le Theoreme de Picard-Borel et la Theorie des fonctions Meromorphes. Paris 1929. — [4] Shah, S. M.: On Exceptional Values of Entire Functions.

Comp. Math. **9**, 227—238 (1951). — [*5*] SHAH, S. M.: Exceptional Values of Entire and meromorphic Functions. Duke Math. J. **19**, 585—594 (1952). — [*6*] SHAH, S. M.: The Lower Order of the Zeros of an Integral Function. J. Indian Math. Soc. **6**, 63—68 (1942). — [*7*] SHAH, S. M.: On the Lower Order of Integral Functions. Bull. Amer. Math. Soc. **52**, 1046—1052 (1946). — [*8*] SHAH, S. M.: A Theorem on Integral Functions of Integral Order (II). J. Indian Math. Soc. **5**, 179—188 (1942). — [*9*] WHITTAKER, J. M.: The Lower Order of Integral Functions. J. London Math. Soc. **8**, 20—27 (1933). — [*10*] VALIRON, G.: Lectures on the General Theory of Integral Functions. Toulouse 1923.

Muslim University, Aligarh (India).

D. S. College, Aligarh (India).

(Eingegangen am 26. Januar 1953.)

Ellis, D.
Math. Zeitschr. Bd. 59, S. 94—96 (1953)

A Modification of the Parallelogram Law Characterization of Hilbert Spaces*).

By
David Ellis.

1. All linear spaces considered in this note are to be understood as *real* linear spaces. It is well-known [2] that Hilbert spaces are characterized among Banach spaces by the "parallelogram law":

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2). \tag{1}$$

The purpose of this note is to restrict the domain over which (1) must be required to hold by adjoining requirements as to the existence and properties of a certain partial ordering. We assume familiarity with the notions of Banach and UMB lattices [1] and metric lattices [3].

If L is any vector lattice [1] we understand by L^+ the set $\{x\in L\mid x>0\}$ and by $k(a)$ (the "absolute of a") the element $a\vee -a$. It is clear that L^+ is a sublattice of L.

2. Let B be any UMB lattice. Select $a, b\in B^+$ so that $a<b$. Then, since $k(a)=a$ and $k(b)=b$, and B is a Banach lattice, $\|a\|\leq\|b\|$.

Lemma 1. *If $a, b\in B^+$ where B is a UMB lattice, and if $a<b$, then $\|a\|<\|b\|$.*

Proof. From the preceding discussion, it suffices to show $\|a\|\neq\|b\|$. Suppose the contrary. Now, $2\|a\|=\|2a\|=\|a\|+\|b\|\geq\|a+b\|$. But, $a+b\geq 2a>0$ (in the case $a=0$, the conclusion is immediate) so that $2\|a\|\leq\|a+b\|$. Thus, $\|a+b\|=2\|a\|$. Since B is UMB, for $\varepsilon>0$ there is $\delta>0$ so that $f, g>0$, $\|f\|=1$, and $\|f+g\|<1+\delta$ imply $\|g\|<\varepsilon$. Now, $1+\delta>1=\|(1/\|a\|)a\|=(1/2\|a\|)\|a+b\|=\|(1/\|a\|)a+(1/2\|a\|)(b-a)\|$. Thus, $\|b-a\|<2\|a\|\varepsilon$ for all $\varepsilon>0$ which is impossible since $b-a\neq 0\neq a$.

3. We shall refer to a Hilbert space which is also a Banach lattice as a Hilbert lattice. We recall [4] that if H is a Hilbert space there is a maximal orthonormal subset E of H so that if E is well ordered, $E=\{x_\alpha\}_{\alpha<\beta}$, then

$$x=\sum_{\alpha<\beta}(x, x_\alpha)x_\alpha \tag{2}$$

and

$$\|x\|^2=\sum_{\alpha<\beta}(x, x_\alpha)^2, \tag{3}$$

where $(x, x_\alpha)=0$ for all but countably many α.

*) Presented to the American Mathematical Society; Thanksgiving, 1952. Part of the work in this paper was accomplished under Air Force contract no. 33(038)-15068, Suppl. no. 2.

Lemma 2. *Let E and H be as above and define in H, $x \leqq y$ if and only if $(x, x_\alpha) \leqq (y, x_\alpha)$ for all $\alpha < \beta$. Then H forms a vector lattice under this partial ordering.*

Proof. The requisite properties follow easily from the inner product rules and the details are left to the reader. Clearly, the lattice operations may be carried out "coordinatewise" in H.

Lemma 3. *If H is partially ordered as in Lemma 2, it forms a Hilbert lattice.*

Proof. From (3), $\|x\| = \|k(x)\|$. But, by definition, $k(x) \leqq k(y)$ implies $|(x, x_\alpha)| \leqq |(y, x_\alpha)|$ for all $\alpha < \beta$. Thus, $k(x) \leqq k(y)$ implies $\|x\| \leqq \|y\|$ by (3).

Lemma 4. *Any Hilbert lattice is a UMB lattice.*

Proof. Select $\varepsilon > 0$ and select δ so that $0 < \delta < (1+\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} - 1$. Then $2\delta + \delta^2 < \varepsilon^2$. Let $f, g \geqq 0$, $\|f\| = 1$, $\|f+g\| < 1+\delta$. Then $f \wedge g \geqq 0 \geqq -(f \wedge g)$, $k(f+g) = f+g = (f \vee g) + (f \wedge g) \geqq (f \vee g) - (f \wedge g) = k(f-g)$, so that $\|f+g\| \geqq \|f-g\|$. But, by (1), $\|g\|^2 = (\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 - 2\|f\|^2)/2 < 2\delta + \delta^2$, so that $\|g\| < \varepsilon$.

Theorem 1. *Any Hilbert space H may be partially ordered to form a Hilbert lattice. Any Hilbert lattice is a UMB lattice and if H is a Hilbert lattice, then H^+ is a metric lattice.*

Proof. In view of Lemmas 1—4, we need only show that there is a monotone strictly increasing function of the norm in H which is a modular functional on H^+. The obvious choice, of course, is $\nu(x) = \|x\|^2$. To see that this is modular we observe from (1),

$$\nu(x) + \nu(y) = \tfrac{1}{2}(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) = \tfrac{1}{2}(\|x+y\|^2 + \|k(x-y)\|^2)$$
$$= \tfrac{1}{2}(\|(x \vee y) + (x \wedge y)\|^2 + \|(x \vee y) - (x \wedge y)\|^2) = \nu(x \vee y) + \nu(x \wedge y).$$

Lemma 5. *If B is a Banach lattice and if (1) subsists in B^+, then (1) subsists in B so that B is a Hilbert lattice.*

Proof. Assume the hypotheses.

$$2(\|a\|^2 + \|b\|^2) = 2(\|k(a)\|^2 + \|k(b)\|^2)$$
$$= \|k(a) + k(b)\|^2 + \|k(a) - k(b)\|^2 = \|k(a) + k(b)\|^2 + \|k(k(a) - k(b))\|^2.$$

But,

$$k(a) + k(b) = k(a+b) \vee k(a-b) \quad \text{and} \quad k(k(a) - k(b)) = k(a+b) \wedge k(a-b).$$

Thus,

$$2(\|a\|^2 + \|b\|^2) = \|k(a+b) \vee k(a-b)\|^2 + \|k(a+b) \wedge k(a-b)\|^2$$
$$= \tfrac{1}{2}(\|k(a+b) + k(a-b)\|^2 + \|k(k(a+b) - k(a-b))\|^2)$$
$$= \|k(a+b)\|^2 + \|k(a-b)\|^2 = \|a+b\|^2 + \|a-b\|^2.$$

Lemma 6. *Let B be a Banach lattice and B^+ be a metric lattice under $\nu(x) = \|x\|^2$. If (1) subsists for pairs of comparable elements in B^+, then (1) subsists in B and B is a Hilbert lattice.*

Proof. By Lemma 5, it suffices to show that (1) holds over B^+. Let $a, b \in B^+$. Then, $2(\|a\|^2+\|b\|^2) = 2(\|a \vee b\|^2+\|a \wedge b\|^2) = \|a+b\|^2+\|a-b\|^2$, since $a \vee b$ and $a \wedge b$ are comparable, and $a+b = (a \vee b) + (a \wedge b)$, $k(a-b) = (a \vee b) - (a \wedge b)$, $\|k(a-b)\| = \|a-b\|$.

Combining now Theorem 1, Lemmas 5 and 6, and the usual characterization theorem we have

Theorem 2. *Let B be a Banach space. Then the following conditions are equivalent pairwise*:

(1) *B is a Hilbert space.*

(2) *There exists a partial ordering in B so that B is a Banach lattice and* (1) *holds over the B^+ defined by this ordering.*

(3) *There exists a partial ordering in B so that B is a Banach lattice, the B^+ defined by this ordering is a metric lattice under $v(x) = \|x\|^2$, and* (1) *holds for pairs of comparable elements in this B^+.*

(4) (1) *holds over B.*

Bibliography.

[1] BIRKHOFF, GARRETT: Lattice Theory (Revised Edition). Amer. Math. Soc. N. Y. **1948**. — [2] BLUMENTHAL, L. M.: Distance Geometries. Columbia: University of Missouri 1938. — [3] ELLIS, DAVID: On the metric characterization of metric lattices. J. Indian Math. Soc. **15**, 152—154 (1951). — [4] HALMOS, PAUL: The Theory of Spectra Multiplicity (Mimeographed). Chicago: University of Chicago 1950.

The Institute for Air Weapons Research,
The University of Chicago and The University of Florida.

(Eingegangen am 1. April 1953.)

Vorlesungen über höhere Mathematik

Von Dr. phil. **Adalbert Duschek,** o. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule Wien.

Erster Band: **Integration und Differentiation der Funktionen einer Veränderlichen. Anwendungen. Numerische Methoden. Algebraische Gleichungen. Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung**

Mit 167 Textabbildungen. X, 395 Seiten. 1949. DM 26.—; Ganzleinen DM 29.—

Zweiter Band: **Unendliche Reihen. Integration und Differentiation der Funktionen von mehreren Veränderlichen. Abschluß der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Fehlertheorie und Ausgleichsrechnung. Lineare Algebra. Tensorfelder**

Mit 125 Textabbildungen. VI, 386 Seiten. 1950. DM 26.—; Ganzleinen DM 29.—

Dritter Band: **Gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen. Variationsrechnung. Funktionen einer komplexen Veränderlichen**

Mit 107 Textabbildungen. IX, 512 Seiten. 1953 DM 36.50; Ganzleinen DM 38.80

Vierter Band: **Randwertprobleme. Reihenentwicklungen. Integralgleichungen. Laplacetransformation**

In Vorbereitung

Aus den Besprechungen: ... Die Darstellung zeigt große Klarheit und Exaktheit. Das Buch ist vor allem für Ingenieure und Physiker bestimmt und deshalb ist besonders die Reichhaltigkeit der Beispiele und Aufgaben zu begrüßen, deren Lösungen am Schluß des Buches im Anhang II zusammengestellt sind. Sie tragen wesentlich zur nutzvollen Verarbeitung des in diesem Band reichlich gebotenen Stoffes bei. Den Anhang I bildet eine Tabelle der Gaussschen Transzendenten. Das Buch wird jedem Ingenieur und Physiker, der ein weiteres Eingehen in mathematische Begriffe und Methoden wünscht, von größtem Nutzen und Genuß sein ... *„Elektrotechnische Zeitschrift"*

SPRINGER-VERLAG / WIEN

Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften

in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete

Herausgegeben von **R. Grammel · E. Hopf · H. Hopf · F. Rellich · F. K. Schmidt B. L. van der Waerden.**

Soeben erschienen:

Band LXV: Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum

Von Dr. **L. Fejes Tóth,** ord. Professor der Mathematik an der Universität Veszprém. Mit 124 Abbildungen. X, 197 Seiten. 1953. DM 24.—; Ganzleinen DM 27.—

Das vorliegende Werk ist Lagerungsproblemen gewidmet, bei denen auch beliebige irreguläre Anordnungen in Betracht gezogen werden. Die reguläre Gestalt der Extremalfigur ist hier oft eine Folgerung der Extremalforderung.

Zum Verständnis der hier aufgeworfenen Probleme sind keine Vorkenntnisse nötig. Es handelt sich um einfache, natürliche und anschauliche Fragen, die aber durch die in ihnen steckenden typischen Schwierigkeiten oft zu ernsten Problemen werden. In den meisten Fällen erfordern aber auch die Lösungen nichts „Höheres", so daß fast das ganze Buch gemeinverständlich gehalten werden konnte. Doch enthält dieser verhältnismäßig elementare Fragenkreis eine Fülle von ungelösten Problemen. Einer der Hauptzwecke des Buches ist es, die Aufmerksamkeit auf diese Dinge zu lenken, um dadurch weitere Mitarbeiter für dieses anziehende Gebiet der Geometrie zu gewinnen.

Inhaltsübersicht: Einige elementargeometrische Sätze. — Sätze aus der Theorie der konvexen Körper. — Lagerungs- und Überdeckungsprobleme in der Ebene. — Packungs- und Deckungswirtschaftlichkeit einer Scheibenfolge. — Extremaleigenschaften der regulären Polyeder. — Irreguläre Lagerungen auf der Kugel. — Lagerungen im Raum. — Literatur-, Namen- und Sachverzeichnis.

Band LXVI: Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen auf funktionentheoretischer Grundlage dargestellt

Von **Ludwig Bieberbach,** ehem. ordentlicher Universitätsprofessor und ehem. ordentliches Mitglied der Preußischen Akademie der Wissenschaften. IX, 338 Seiten. 1953. DM 36.—; Ganzleinen DM 39.60

Inhaltsübersicht: Die grundlegenden Existenzsätze. — Singuläre Stellen bei gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung. — Das Verhalten der Lösungen von $dw/dz=(aw+bz)/(cw+dz)$ für konstante a, b, c, d im Punkte (0,0). — Außerwesentlich singuläre Stellen zweiter Art. — Differentialgleichungen erster Ordnung im Großen. — Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung im Kleinen. — Differentialgleichungen der Fuchsschen Klasse. — Die hypergeometrische Differentialgleichung. — Die Besselsche Differentialgleichung. — Differentialgleichungen der Fuchsschen Klasse mit vier singulären Punkten. — Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten. — Einiges über nichtlineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung. — Namen- und Sachverzeichnis.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Springer-Verlag, Berlin · Göttingen · Heidelberg. — Druck der Universitätsdruckerei H. Stürtz AG., Würzburg.
Printed in Germany.